INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL GUSTAVO URIBE RAMÍREZ

GRANADA, CUNDINAMARCA AÑO 2022

PLAN DE MEJORAMIENTO PARA ESTUDIANTES CON DESEMPEÑO BAJO

<table>
<tr><td>DOCENTE: <u>ÁLVARO VANEGAS ESCOBAR</u></td><td>ASIGNATURA: <u>MATEMÁTICA</u></td></tr>
<tr><td>GRADO: <u>DÉCIMO</u> PERIODO: <u>FINAL</u></td><td>FECHA ELABORACIÓN Y ENTREGA AL ESTUDIANTE: <u>2 DE OCTUBRE DE 2022</u></td></tr>
<tr><td>COMPETENCIA(S) NO ALCANZADA(S)
El (la) estudiante comprenderá, aplicará y valorará la relación número cantidad y las operaciones entre los números de diferentes sistemas numéricos para desarrollar un pensamiento numérico que le permita administrar los recursos.

El (la) estudiante será capaz de plantear, interpretar, graficar y tabular datos para obtener información de situaciones que le permitan tomar decisiones en forma precisa y poder administrar mejor los recursos.

El (la) estudiante comprenderá aplicará y valorará las propiedades de los espacios en dos y tres dimensiones, las formas y las figuras que estos contienen, para adaptarse al espacio porque debe sobrevivir.

El (la) estudiante comprenderá el modelo de constante y variable para aplicarlos y poder comprender los fenómenos naturales porque debe adaptarse al medio que lo rodea.</td><td>DESCRIPCIÓN DE ACTIVIDADES A DESARROLLAR

PRIMERA ACTIVIDAD: Busca que el (la) estudiante realice un repaso sobre aspectos de los números reales y razones trigonométricas, con el fin de aportar al derecho básico de aprendizaje:

“1. 3.Comparará y contrastará las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
2. 10. Describirá y modelos fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas”

SEGUNDA ACTIVIDAD: Busca que el (la) estudiante realice un repaso sobre aspectos básicos de las funciones trigonométricas y cuerpos geométricos, con el fin de aportar al derecho básico de aprendizaje:

1. “6. Identificará en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono
2. 27. Modelará situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas”

TERCERA ACTIVIDAD: Busca que el (la) estudiante realice un repaso sobre aspectos básicos de variación y modelación de funciones trigonométricas, propiedades de los límites y la modelación de objetos geométricos. Con el fin de aportar al derecho básico de aprendizaje:

“1. Modela objetos geométricos en diversos sistemas de coordenadas (cartesiano, polar, esférico) y realiza comparaciones y toma decisiones con respecto a los modelos
2. 27. Modelará situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto.
3. 10. Describirá y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas”

CUARTA ACTIVIDAD: Busca que el (la) estudiante realice un repaso sobre aspectos básicos de geometría analítica involucrando funciones trigonométricas y cónicas, con el fin de aportar al derecho básico de aprendizaje:

1. “7. Identificará característica de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas.
2. 8. Resolverá problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras
3. 11. Reconocerá y describirá curvas y o lugares geométricos.”</td></tr>
<tr><td>CRITERIOS DE EVALUACIÓN
DBA
4. 3.Comparará y contrastará las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.
5. 6. Identificará en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
6. 7. Identificará característica de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas.
7. 8. Resolverá problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
8. 9. Usará argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.</td><td>FUENTES BIBLIOGRÁFICAS

HIPERTEXTO GRADO 10°, EDITORIAL SANTILLANA
MATEMÁTICAS GRADO 10°, EDITORIAL MC GRAW HILL</td></tr>
</table>

9. 10. Describirá y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
10. 11. Reconocerá y describirá curvas y o lugares geométricos.
11. 27. Modelará situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.

Propios del área de matemática comunes para cada periodo
Mediante la evaluación, se pretende destacar a nivel individual el desarrollo de competencias básicas en el educando, con especial énfasis en competencias argumentativa, interpretativa y propositiva, competencias comunicativas, competencias o cualidades personales, competencias interpersonales, competencias laborales, competencias tecnológicas, competencias sistémicas. Tomando como referencia:

Conceptos Teóricos: Lo que se aprende.

- Aptitudes: Desarrollo de potencialidades, habilidades y destrezas.
- Actitudes: Formación de la voluntad, querer aprender, desarrollo de valores.

Los siguientes son los aspectos que se tienen en cuenta para llevar a cabo esta evaluación:

- Participación en clase.
- Evaluación en forma oral o escrita.
- Trabajo individual y grupal.
- Sustentación de contenidos teóricos.
- Desarrollo de talleres y guías.
- Cálculo matemático.

Planteamiento, análisis, estrategias y propuestas en la solución de problemas.
Manejo adecuado de instrumentos tecnológicos, como computadoras, calculadoras, tabletas, videos, entre otros.
Mediante la planeación, elaboración, seguimiento, evaluación y realimentación de proyectos de aula.

PROPIOS DE ESTA ACTIVIDAD DE NIVELACIÓN

1. El estudiante deberá presentarse en las fechas establecidas por la institución educativa, de lo contrario será necesario presentar la excusa correspondiente, si se trató de enfermedad excusa médica (centro de salud, tarjeta profesional del médico, es decir que sea legal), si se trató de calamidad, el estudiante deberá presentar una excusa por escrito, con el acudiente y deberá estar aprobada por las directivas de la institución (sello de coordinación o directivos). En caso contrario se asumirá por perdida la materia y quedara registrado en acta de nivelación que el estudiante no aprobó la nivelación.

2. El día de la nivelación, el estudiante deberá presentar la actividad de nivelación completamente resuelta y estudiada, la cual tiene un valor de 40% y es requisito indispensable para poder presentar la sustentación escrita (es decir, si no presenta esta actividad no podrá presentar la sustentación de la nivelación).

3. El día de la nivelación el estudiante deberá presentarse con el cuaderno al día, bien ordenado (se recomienda solicitar en calidad de préstamo el de otro compañero (a) que se encuentre al día para que el estudiante pueda adelantarse y estudiar con antelación). Lápiz, esfero y demás útiles que pueda necesitar. Esto posee un valor del 10 %.

4. Una vez cumplidos los requisitos anteriores (es decir, después de verificar que el estudiante presento la actividad de nivelación y los materiales solicitados) se aplicara una prueba escrita al estudiante tomando como referente los temas estudiados durante el año 2022. Esta actividad tiene un valor de 50%.

5. Adicionalmente, se aconseja al estudiante estudiar y resolver con suficiente antelación la actividad de nivelación, la cual incluye los temas tratados en el curso de Matemática.

6. **Finalmente, favor asumir con responsabilidad la nivelación. Lo anterior garantizara la posibilidad de aprobar la materia.**

ANEXOS (Guías – Talleres):
ANEXO 1 GUÍA REPASO TEMAS TRATADOS DURANTE EL AÑO 2022

FECHA DE ENTREGA 7 DE OCTUBRE DE 2022	**FECHA DE SUSTENTACIÓN** ÚNICAMENTE 1 A 4 DE NOVIEMBRE DE 2022
ESTUDIANTE	**VALORACIÓN** **FIRMA DOCENTE**

Coordinación académica. Lucy Gutiérrez.

ÁREA: MATEMÁTICAS ASIGNATURA: MATEMÁTICAS GRADO: DÉCIMO PERIODO: FINAL

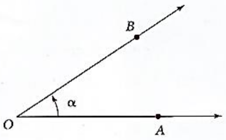
ACTIVIDAD CONVERSIÓN DE ÁNGULOS (SISTEMA SEXAGESIMAL)

Ángulos

Un **ángulo** es la unión de dos semirrectas que se cortan en un punto. Las semirrectas son los **lados** del ángulo y el punto en común es el **vértice**.

En trigonometría, un ángulo se define como la rotación de una semirrecta sobre su origen. La posición inicial de la semirrecta es el **lado inicial del ángulo** y la posición final de la semirrecta en la rotación es el **lado final del ángulo**.

En el ángulo $\measuredangle AOB$ de la figura, O es el vértice, $\overline{OA}$ es el lado inicial y $\overline{OB}$ es el lado final.



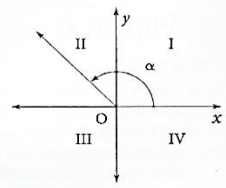
RECUERDA QUE...

Los ángulos se pueden simbolizar con letras griegas como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), ϕ (fi).

El ángulo $\measuredangle AOB$ también se puede simbolizar como $\measuredangle\alpha$.

Ángulo en posición normal

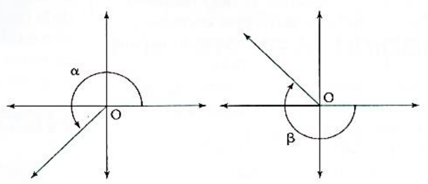
Un ángulo está en **posición normal** o **estándar**, si está representado en un sistema de coordenadas, en el cual su vértice es el **origen** y su lado inicial coincide con el semieje positivo x.



La ubicación del lado final del ángulo, en posición normal, permite determinar el cuadrante donde se encuentra el ángulo, por ejemplo, el ángulo que está al lado derecho está en el cuadrante II.

Un ángulo se determina mediante el sentido y la magnitud de su rotación.

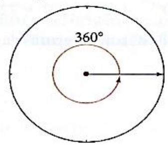
- Cuando un ángulo se genera por una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo es *positivo*.
- Si la rotación se realiza en el mismo sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es *negativo*.



α es positivo β es negativo

Medición de ángulos en el sistema sexagesimal

La unidad de medida de ángulos en el sistema sexagesimal es el grado. Cuando un ángulo realiza una rotación completa, es decir, que el lado final coincide con el lado inicial, el ángulo se denomina **ángulo giro**, su medida es 360 grados y se expresa 360°.



Un grado se define como $1° = \frac{1}{360}$ parte de la rotación completa.

Por ejemplo, cuando el lado inicial no realiza ninguna rotación la medida del ángulo en grados es 0°.

Si un ángulo realiza $\frac{1}{4}$ de la rotación completa, la medida del ángulo es:

$$\frac{1}{4}(360°) = 90°.$$

Si un ángulo realiza $\frac{1}{2}$ de la rotación completa, la medida del ángulo es:

$$\frac{1}{2}(360°) = 180°.$$

Un grado tiene dos submúltiplos: el minuto y el segundo y se determinan de la siguiente forma:

$1 \text{ minuto} = 1' = \frac{1}{60°}$ $\quad$ $1 \text{ segundo} = 1'' = \frac{1}{60'} = \frac{1}{3.600°}$

De esta manera, se tiene que $1° = 60'$, $1' = 60''$, $1° = 3.600''$.

Ejemplos

① Expresar 56,74° en grados, minutos y segundos.

$56{,}74° = 56° + 0{,}74°$ — *Se expresa el ángulo como la suma de la parte entera y la parte decimal.*

$= 56° + (0{,}74 \times 60')$ — *Se multiplica la parte decimal por 60.*

$= 56° + 44{,}4'$ — *Se convierte la parte decimal a minutos.*

$= 56° + 44' + 0{,}4'$ — *Se expresan los minutos como la suma de la parte entera y la parte decimal.*

$= 56° + 44' + (0{,}4 \times 60'')$ — *Se multiplica la parte decimal por 60 para pasarlo a segundos.*

$= 56° + 44' + 24''$ — *Se convierte la parte decimal a segundos.*

Por lo tanto, 56,74° = 56°44'24", es la expresión en grados, minutos y segundos.

② Expresar en grados 25°12'38".

Para expresar en grados 25°12'38", se escribe este valor como la suma de grados más los minutos multiplicados por $\frac{1}{60°}$, más los segundos multiplicados por $\frac{1}{3.600°}$, de la siguiente manera:

$25°12'38'' = 25° + 12 \times \left(\frac{1}{60°}\right) +$

Se multiplica por $\left(\frac{1}{60°}\right)$ los minutos, y por $\frac{1}{3.600°}$ los segundos.

$= 25° + 0{,}2° + 0{,}01°$

$= 25{,}21°$

Se realizan las sumas indicadas.

Por lo tanto, 25°12'38" = 25,21°.

Ángulos coterminales

Dos ángulos en posición normal son **coterminales** si comparten el mismo lado final, en este caso no importa la magnitud ni el sentido de la rotación de los ángulos.

Por ejemplo, para encontrar ángulos que son coterminales con el ángulo $\theta = 120°$ en posición normal, se suma o se resta múltiplos de 360° como sigue:

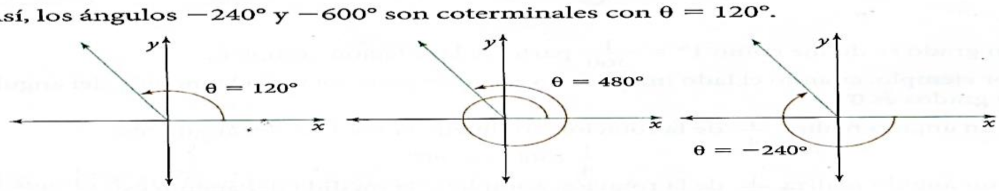
$$120° + 360° = 480° \text{ y } 120° + 720° = 840°$$

Por lo tanto, los ángulos 480° y 840° son coterminales con $\theta = 120°$.

Los ángulos negativos que son coterminales con $\theta = 120°$ se obtienen como:

$$120° - 360° = -240° \text{ y } 120° - 720° = -600°$$

Así, los ángulos −240° y −600° son coterminales con $\theta = 120°$.



Actividades

Recupera información: 1 Ejercita: 2-3-4 Razona: 5-6-7-8

1 Dibuja en el plano cartesiano cada ángulo en posición normal y luego, indica el cuadrante donde se encuentra.

a. 45°	e. 30°	i. 120°	m. 300°
b. −270°	f. 235°	j. −50°	n. −720°
c. 750°	g. −225°	k. 450°	o. −30°
d. −1.190°	h. 835°	l. −315°	p. −240°

2 Expresa la medida de cada ángulo en grados, minutos y segundos.

a. 48,55°	c. 12,595°	e. 20,601°
b. 36,075°	d. 60,27°	f. 4,086°

3 Expresa la medida de cada ángulo en grados.

a. 20°15'12"	d. 48°52'	g. 15°10'
b. 48°52'25"	e. 122°13'	h. 139°21'
c. 38°19'	f. 34°12'28"	i. 2°59'59"

4 Realiza la operación indicada.

a. 0,72° + 2,58° + 3°25'30"
b. 82° − 43°29'48"
c. 17°30'29" + 72.488°
d. 180° − 64°20'53"

5 Encuentra la medida de cada ángulo en grados. Luego, dibuja en el plano el ángulo en posición normal.

a. Media rotación en el sentido de las manecillas del reloj.
b. Cinco sextos de rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.
c. Siete medios de rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.
d. Un sexto de rotación en el sentido de las manecillas del reloj.

6 Encuentra un ángulo positivo y otro negativo que sea coterminal con cada ángulo.

a. 275,89°	c. 804,56°	e. 2598°
b. 334°	d. 234,06°	f. 72,5°

7 Encuentra un ángulo entre 0° y 360° que sea coterminal al ángulo dado.

a. 2.560° b. 3.600° c. 1.090°

8 ¿Cuál es la diferencia horaria entre Bogotá y Tokio si Bogotá se encuentra a 74°4'50" longitud oeste y Tokio a 139°45' longitud este?

ÁREA: MATEMÁTICAS ASIGNATURA: MATEMÁTICAS GRADO: DÉCIMO PERIODO: FINAL

ACTIVIDAD CONVERSIÓN DE ÁNGULOS (SISTEMA RADIAN)

Medición de ángulos en el sistema cíclico

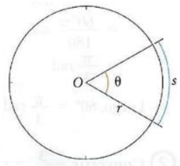


Figura 1

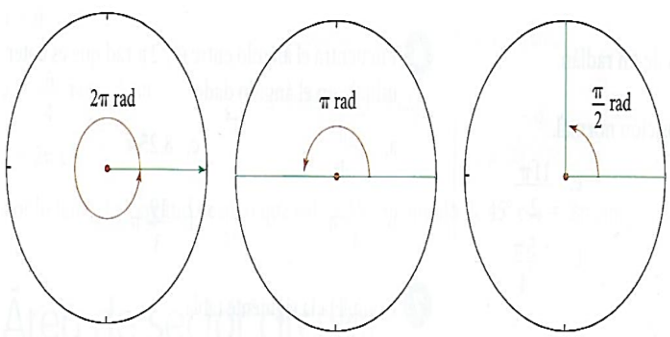
La unidad de medida de ángulos en el sistema cíclico es el **radián**. La medida de un ángulo en el sistema cíclico se determina a partir de la relación que existe entre un ángulo central en una circunferencia y el arco subtendido por dicho ángulo.

Sea una circunferencia con centro en el origen y radio r. El ángulo θ formado por dos radios y el arco s cuyo vértice es el origen se denomina **ángulo central**, el ángulo θ como se muestra en la figura 1.

Cuando la medida del arco s es la misma medida del radio de la circunferencia, se dice que θ mide un radián. Así, $\theta = 1$ rad *es la medida del ángulo central* θ cuyo arco mide un radio.

Si el radio de la circunferencia mide 1 unidad, entonces, la longitud de la circunferencia es 2π. Por lo tanto:

- Una rotación completa tiene una medida de 2π rad.
- Si un ángulo realiza un $\frac{1}{2}$ de la rotación completa, entonces, su medida es π rad.
- Si un ángulo realiza un $\frac{1}{4}$ de la rotación completa, entonces, su medida es $\frac{\pi}{2}$ rad.



Relación entre grados y radianes

Como la medida en grados de una rotación completa es 360° y su medida en radianes es 2π rad, entonces, se tiene que $360° = 2\pi$ rad.

$360° = 2\pi$ rad

$180° = \pi$ rad — *Se dividen ambas partes entre 2.*

$360° = 2\pi$ rad

$1° = \left(\frac{\pi}{180°}\right)$rad — *Se dividen ambas partes entre 360.*

Si $\pi \approx 3{,}1416$, entonces, $1° \approx 0{,}01745$ rad.

2π rad $= 360°$

1 rad $= \left(\frac{180°}{\pi}\right)$ rad — *Se divide ambas partes entre 2π.*

1 rad $\approx 57{,}296°$

RECUERDA QUE…

El signo $\approx$ significa aproximadamente igual a.
Por ejemplo $\pi \approx 3{,}1416$.

Ejemplos

1 Convertir 60° en radianes.

$$60° = 60° \times \frac{\pi}{180°}\text{ rad}$$ *Se multiplica por $\left(\frac{\pi}{180°}\right)$.*

$$= \frac{60°\pi}{180°}\text{ rad}$$ *Se simplifica.*

$$= \frac{\pi}{3}\text{ rad}$$

Luego, $60° = \frac{\pi}{3}$ rad.

2 Convertir $-\frac{3}{4}\pi$ rad en grados.

$$-\frac{3}{4}\pi\text{ rad} = -\frac{3}{4}\pi \times \frac{180°}{\pi}$$ *Se multiplica por $\left(\frac{180°}{\pi}\right)$.*

$$= -\frac{3 \times 180° \times \pi}{4 \times \pi}$$ *Se simplifica.*

$$= -135°$$

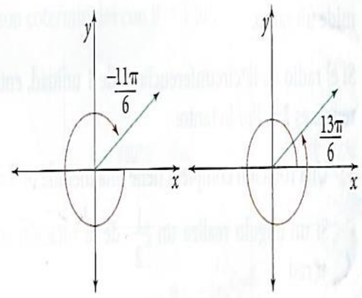
Por lo tanto, $-\frac{3}{4}\pi$ rad $= -135°$.

3 Hallar un ángulo positivo y otro negativo que sea coterminal con $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Para encontrar ángulos que son coterminales con $\theta = \frac{\pi}{6}$ en posición normal, se suma o se resta múltiplos de 2π como sigue:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{\pi + 12\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi - 12\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}$$



Actividades

Recupera inf.: 1 | Interpreta: 2 | Ejercita: 3-4-5-6-7-8 | Razona: 9

1 Escribe el valor en grados de un radián.

2 Dibuja cada ángulo en posición normal.

a. 10° c. $\frac{\pi}{2}$ e. $\frac{11\pi}{2}$

b. 10 d. $\frac{7}{6}\pi$ f. $-\frac{5\pi}{4}$

3 Expresa cada ángulo en radianes.

a. 45° e. −150° i. 22,7°

b. 90° f. −225° j. −810°

c. 120° g. 315° k. 270°

d. 135° h. 240° l. 330°

4 Expresa cada ángulo en grados.

a. $\frac{4}{3}\pi$ c. $\frac{3\pi}{4}$ e. $\frac{19}{6}\pi$

b. $\frac{11}{6}\pi$ d. $-\frac{7}{6}\pi$ f. $\frac{8}{3}\pi$

5 Encuentra un ángulo positivo y uno negativo que sea coterminal con cada ángulo.

a. 5π c. $\frac{5}{3}\pi$

b. $-\frac{11}{4}\pi$ d. $\frac{28}{9}\pi$

6 Encuentra el ángulo entre 0 y 2π rad que es coterminal con el ángulo dado.

a. $-\frac{\pi}{4}$ c. $8{,}25\pi$

b. $\frac{31}{4}\pi$ d. $\frac{19}{3}\pi$

7 Completa la siguiente tabla.

Vueltas	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{8}{3}$			
Grados				270°			30°	
Radianes						$\frac{7}{4}\pi$		$\frac{2\pi}{3}$

8 Dibuja los ángulos α y β en posición normal, luego, escribe cada ángulo como una parte de una rotación completa.

a. $\alpha = 10°$ y $\beta = 10$ rad

b. $\alpha = 20°$ y $\beta = 20$ rad

9 Halla el ángulo complementario de cada ángulo.

a. $\alpha = 48{,}705°$ c. $\gamma = \frac{\pi}{6}$rad

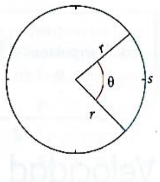
b. $\beta = 37°20'15''$ d. $\theta = 0{,}89$ rad

ÁREA: MATEMÁTICAS ASIGNATURA: MATEMÁTICAS GRADO: DÉCIMO PERIODO: FINAL

ACTIVIDAD APLICACIÓN CONVERSIÓN DE ÁNGULOS (LONGITUD DE ARCO, SECTOR CIRCULAR Y MOVIMIENTO CIRCULAR)

Longitud de arco

Para determinar la **longitud de arco** se considera θ un ángulo central medido en radianes, que subtiende un arco de longitud s, en la circunferencia de radio r, como se muestra en la figura.



Como un ángulo de 2π radianes determina la longitud de la circunferencia de radio r, entonces, el ángulo central θ determina la longitud s que es una parte de la longitud de la circunferencia, así:

$s = \frac{\theta}{2\pi} \times$ *longitud de la circunferencia*

$s = \frac{\theta}{2\pi} \times (2\pi r)$ *Se remplaza la longitud de la circunferencia de radio r que es 2πr.*

$s = \theta r$

Entonces, la medida de la longitud del arco s que subtiende un ángulo central θ (medido en radianes) en una circunferencia de radio r es: $s = \theta r$.

Por ejemplo, para determinar la longitud del arco que subtiende un ángulo central $\theta = 45°$ cuyo radio mide 8 cm.

Se convierte el ángulo $\theta = 45°$ a radianes así:

$45° = 45° \times \frac{\pi}{180°}\text{rad} = \frac{\pi}{4}\text{rad}$ *Se convierten 45° a radianes.*

$s = \theta r$ *Se aplica la fórmula de longitud de arco.*

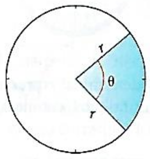
$s = \frac{\pi}{4}\text{ rad} \times 8\text{ cm}$ *Se remplazan θ y r.*

$s = 2\pi$ cm

Por lo tanto, la longitud de arco que subtiende un ángulo de 45° es $s = 2\pi$ cm.

Área de sector circular

Sea θ un ángulo central medido en radianes, de una circunferencia de radio r, y si A es el área del sector circular subtendido por θ, entonces $A = \frac{1}{2}r^2\theta$.



Por ejemplo, para determinar el área de un sector circular con ángulo central $\theta = \frac{\pi}{4}$ rad, cuyo radio de la circunferencia es 3 cm, se realizan los siguientes pasos:

Velocidad angular

Cuando un cuerpo gira con rapidez constante formando un ángulo central θ, la **velocidad angular** ω es la razón entre el ángulo central recorrido durante cierto tiempo t, así, $\omega = \frac{\theta}{t}$.

Velocidad lineal

La **velocidad lineal** es la razón entre la longitud de arco recorrida y el tiempo que dura este recorrido.

$v = \frac{s}{t}$ *Se remplaza s = θr en la ecuación.*

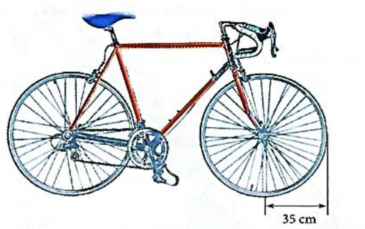
$v = \frac{\theta r}{t} = \frac{\theta}{t}r$ *Se remplaza $\omega = \frac{\theta}{t}$ en la ecuación.*

$v = \omega r$

La velocidad lineal es igual al producto de la velocidad angular por el radio $v = \omega r$.

Ejemplos

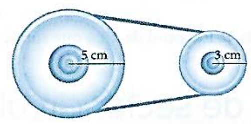
1 **La rueda de una bicicleta de radio 35 cm gira a razón de 15 rpm. Determinar la velocidad angular de la rueda y su velocidad lineal.**



La velocidad angular se determina expresando 15 rpm en radianes sobre minuto, entonces, se realiza lo siguiente:

Primero, se multiplica 15 rpm por 2π (una revo-

2 **Dos poleas de radio 5 cm y 3 cm, respectivamente, están conectadas por una banda de caucho. Si la polea pequeña gira a razón de 4 rpm, determinar la velocidad angular de cada polea.**



En un sistema de poleas la velocidad lineal de cada polea es la misma.

La velocidad angular ω_1 de la polea pequeña, es:

$\omega_1 = \frac{4\text{ rev}}{1\text{ min}} \times \frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}} = 8\pi\text{ rad/min}$

Como la velocidad lineal v_1 de la polea pequeña y v_2 la velocidad de la polea grande son iguales, se tiene:

Actividades

Recupera información: 1 Ejercita: 2-3

1 Completa los enunciados.

a. En una circunferencia de radio r, un ángulo central de θ radianes subtiende un arco de longitud s = ________.

b. Un objeto viaja alrededor de una circunferencia de radio r con rapidez constante. Si s es la distancia recorrida en el tiempo t alrededor de la circunferencia y θ es el ángulo central (en radianes) barrido en el tiempo t, entonces, la velocidad lineal es v = ________ y la velocidad angular es ω = ________.

2 Determina la cantidad que falta, teniendo en cuenta que s es la longitud del arco de una circunferencia de radio r subtendido por el ángulo central θ.

a. $r = 5$ m, $s = 3$ m, $\theta = ?$

b. $r = 10$ m, $\theta = \frac{1}{2}$ rad, $s = ?$

c. $\theta = \frac{1}{3}$ rad, $s = 3$ millas, $r = ?$

d. $r = 8$ pies, $\theta = 2$ rad, $s = ?$

e. $r = 3$ m, $\theta = 120°$, $s = ?$

f. $\theta = \frac{\pi}{5}$ rad, $s = 10$ cm, $r = ?$

3 Halla el dato que falta.

a. $r = 10$ m, $\theta = \frac{1}{2}$ rad, $A = ?$

b. $r = 8$ pies, $\theta = 2$ rad, $A = ?$

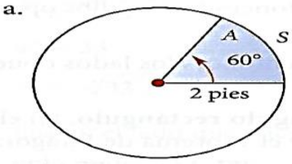
c. $\theta = \frac{1}{4}$ rad, $A = 2\text{ cm}^2$, $r = ?$

d. $r = 5$ m, $A = 3\text{ m}^2$, $\theta = ?$

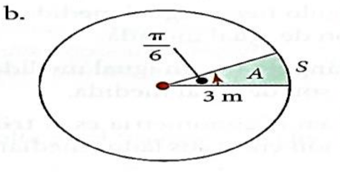
Soluciona problemas

4 Calcula la longitud s y el área $\left(A = \frac{1}{2}r^2\theta\right)$.

a.



b.

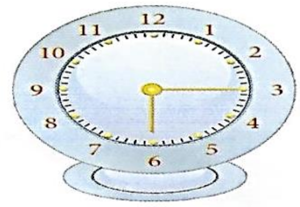


5 El minutero de un reloj tiene 3 cm de largo. Encuentra la distancia que recorre la punta del minutero.

a. En 15 minutos

b. En 25 minutos

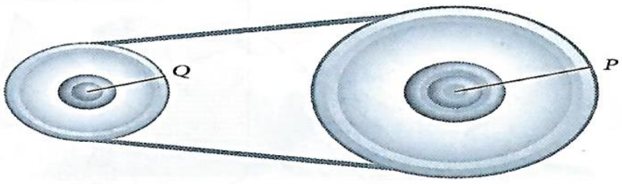
c. En 1 h 20 minutos



6 Un péndulo se mueve en un ángulo de 20° cada segundo. Si tiene 40 pulgadas de largo, ¿cuánto se mueve su punto cada segundo?

7 Un aspersor riega agua a una distancia de 10 m al girar un ángulo de 135°. Encuentra el área del pasto que recibe agua de este aspersor.

8 Una correa conecta dos poleas de radios $r = 10$ cm y $R = 25$ cm. Si la polea grande da un giro completo, ¿cuál es el ángulo que habrá girado la polea pequeña?



9 Una polea de 36 cm de diámetro gira por medio de una banda de transmisión que se mueve a una velocidad de 5 m/s. ¿Cuántas revoluciones por segundo corresponden a la rotación de la polea?

10 Un niño hace girar una piedra atada a una cuerda de 1,2 m de largo a una tasa de 150 revoluciones por minuto (rpm). Encuentra la velocidad lineal de la piedra cuando se suelta.

11 El radio de las llantas de un auto es de 42 cm. Si giran a razón de 3 revoluciones por segundo, ¿a qué velocidad se mueve el auto? Expresa tu respuesta en centímetros por segundo y en kilómetros por hora.

ÁREA: MATEMÁTICAS ASIGNATURA: MATEMÁTICAS GRADO: DÉCIMO PERIODO: FINAL

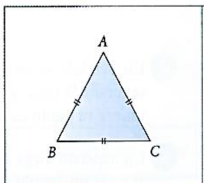
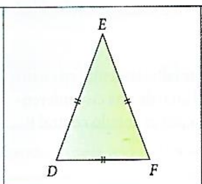
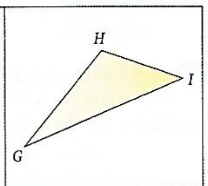
TRIÁNGULOS (CONCEPTOS BASICOS Y TEOREMA DE PITÁGORAS)

Triángulos

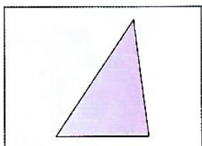
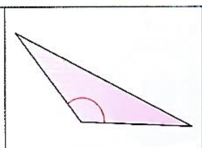
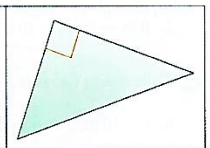
La **trigonometría** se originó como el estudio de las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. A continuación, se recordarán algunos conceptos generales sobre los triángulos.

Clasificación de triángulos

Los triángulos se clasifican según la longitud de sus lados como:

Equilátero	Isósceles	Escaleno
		
Todos sus lados tienen la misma medida.	Solo dos de sus lados tienen la misma medida	Todos sus lados tienen diferente medida.

Los triángulos se clasifican según la medida de sus ángulos como:

Acutángulo	Obtusángulo	Rectángulo
		
Todos sus ángulos son agudos.	Tiene un ángulo obtuso y dos ángulos agudos.	Tiene un ángulo recto y dos ángulos agudos.

Propiedades de los triángulos

Los triángulos cumplen las siguientes propiedades:

- La suma de las medidas de los ángulos interiores de todo triángulo es 180°.
- Todo triángulo equilátero es equiángulo, es decir, las medidas de sus ángulos internos son iguales, en este caso cada ángulo mide 60°.
- Si dos lados de un triángulo tienen igual medida, entonces los ángulos opuestos a estos lados también son de igual medida.
- Si dos ángulos de un triángulo tienen igual medida, entonces los lados opuestos a estos ángulos también son de igual medida.

Un triángulo muy utilizado en trigonometría es el **triángulo rectángulo**, en el que se hace el estudio de la relación entre sus lados mediante el Teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

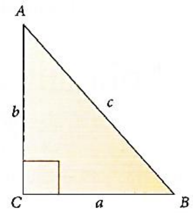
El **teorema de Pitágoras** permite determinar los lados que conforman un triángulo rectángulo.

Sea ACB un triángulo rectángulo con ángulo recto en C. Los lados AC y CB se denominan **catetos** y el lado AB se denomina **hipotenusa**.

Si $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$, entonces:

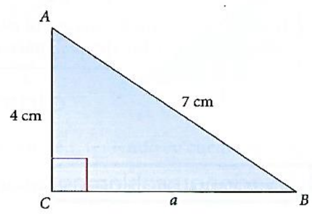
$$a^2 + b^2 = c^2$$

El teorema de Pitágoras establece que para todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



Ejemplos

1 Determinar el valor del lado que hace falta en el siguiente triángulo:



Ya que del triángulo solo se conoce un cateto y la hipotenusa, se usa el teorema de Pitágoras para determinar la medida del cateto a:

$a^2 + 4^2 = 7^2$ *Se remplazan los datos en la fórmula.*

$a^2 + 16 = 49$ *Se realizan las operaciones de potenciación.*

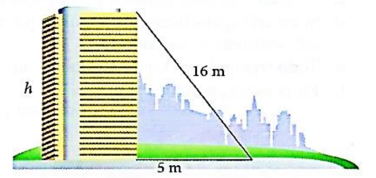
$a^2 = 49 - 16$

$a^2 = 33$ *Se despeja el cateto desconocido y se realizan las operaciones indicadas.*

$a = \sqrt{33}$

Luego, el lado que hace falta en el triángulo rectángulo mide $\sqrt{33}$ cm.

2 Un edificio proyecta una sombra de 5 m y la distancia entre la terraza del edificio al final de la sombra es de 16 m. Encontrar la altura del edificio.



El problema se puede plantear por medio de un triángulo rectángulo como se aprecia en la figura.

La altura del edificio corresponde a un cateto del triángulo. Se utiliza el teorema de Pitágoras para determinar la altura.

$h^2 + 5^2 = 16^2$ *Se aplica el teorema de Pitágoras.*

$h^2 + 25 = 256$ *Se realizan las operaciones indicadas.*

$h^2 = 256 - 25$ *Se despeja la altura al cuadrado.*

$h^2 = 231 \approx h = \sqrt{231} \approx 15{,}19\ m.$

La altura del edificio es aproximadamente 1,5 m.

Actividades

Recupera información: 1 | Ejercita: 2-3 | Razona: 4 | Modela: 5

1 Completa los enunciados.

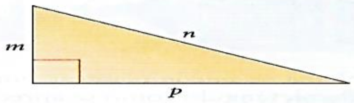
a. Según la medida de sus lados, los triángulos se clasifican en...
b. Según la medida de sus ángulos, los triángulos se clasifican en...
c. Si en un triángulo rectángulo x y y son los catetos y z la hipotenusa, $y^2 =$ ________ .

2 Dibuja en cada caso el triángulo, según las condiciones dadas.

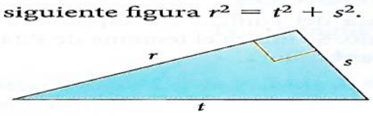
a. Un triángulo equilátero, cuyo lado mide 3 cm.
b. Un triángulo isósceles, cuyos dos lados congruentes miden 4 cm.
c. Un triángulo isósceles, en el cual dos ángulos congruentes miden 30° y el lado que los separa 6 cm.
d. Un triángulo acutángulo que sea escaleno.
e. Un triángulo rectángulo que sea isósceles.

3 Determina en cada caso si el enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta.

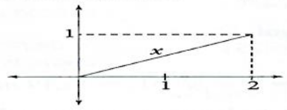
a. Todo triángulo equiángulo es equilátero.
b. Algunos triángulos escalenos son isósceles.
c. Ningún triángulo equilátero es isósceles.
d. Si un triángulo tiene dos ángulos que suman 90°, entonces es rectángulo.
e. Todo triángulo rectángulo es escaleno.
f. En la siguiente figura $p^2 = n^2 - m^2$.



g. En la siguiente figura $r^2 = t^2 + s^2$.

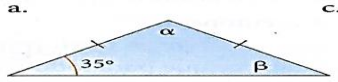


h. En la siguiente figura $x = \sqrt{5}$.

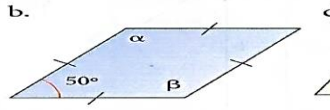


4 Encuentra la medida de los ángulos α y β en cada caso.

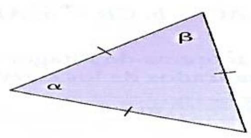
a.



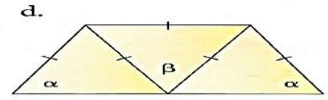
b.



c.

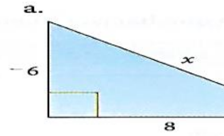


d.

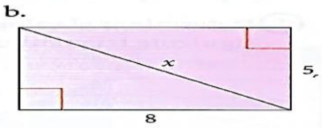


5 Escribe la ecuación que permite hallar el valor de x y resuélvela.

a.



b.



Soluciona problemas

6 Realiza una gráfica para cada problema y soluciónalo.

a. Halla la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 13 cm.
b. Una escalera de 10 m de longitud está apoyada sobre la pared. El pie de la escalera dista 6 cm de la pared. Encuentra qué altura alcanza la escalera sobre la pared.
c. Calcula el lado de un cuadrado cuya diagonal mide 16 cm.
d. Jorge construyó una mesa rectangular para jugar con sus amigos. Cuando la terminó, la midió y encontró que un lado tenía 16 dm de largo, 12 dm de ancho y una diagonal medía 22 dm. ¿La mesa es realmente rectangular?

Cuerpos geométricos

Un **cuerpo geométrico** o sólido es una parte del espacio limitada por superficies planas o curvas. Los cuerpos geométricos se clasifican en poliedros y en cuerpos redondos.

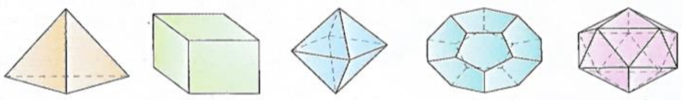
Poliedros

> Un **poliedro** es un sólido limitado por superficies planas denominadas caras, las cuales tienen forma de polígono.

Los **poliedros** pueden ser **convexos** o **cóncavos**. Un poliedro es convexo cuando todas sus caras son polígonos convexos. En cambio, un poliedro es cóncavo si alguna de sus caras es un polígono cóncavo.

Los poliedros convexos se clasifican a su vez en **regulares** e **irregulares**. Un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares congruentes y en cada vértice concurre el mismo número de caras. En cambio, un poliedro es irregular si sus caras no son todas congruentes o no concurren el mismo número de caras por vértice.

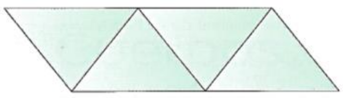
Los cinco poliedros regulares son:



Tetraedro Hexaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

El tetraedro, octaedro e icosaedro tienen 4, 8 y 20 caras, respectivamente, las cuales son triángulos equiláteros congruentes. El dodecaedro tiene 12 caras, las cuales son pentágonos regulares congruentes. El hexaedro o cubo está constituido por 6 caras, las cuales son cuadrados congruentes.

El desarrollo de un poliedro consiste en determinar la unión de las superficies de sus caras. Así, el desarrollo de un tetraedro es el siguiente:

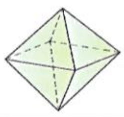


En todo poliedro convexo se cumple una relación entre el número de caras, de vértices y de aristas. Dicha relación se denomina **fórmula de Euler** y se plantea así:

$$C + V = A + 2$$

Donde C es el número de caras, V es el número de vértices y A es el número de aristas.

Por ejemplo, en un octaedro $C = 8$, $V = 6$ y $A = 12$, y por tanto, se cumple la relación de Euler:



$$C + V = A + 2$$
$$8 + 6 = 12 + 2$$
$$14 = 14$$

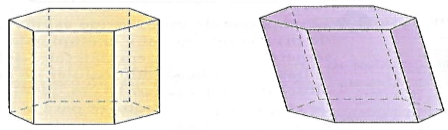
Prisma

> Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos llamados *bases* y varios paralelogramos llamados caras *laterales*.

Los prismas se clasifican según el polígono que corresponde a sus bases. Así, los prismas pueden ser triangulares, pentagonales, hexagonales, entre otros.

También se puede clasificar los prismas en **rectos** y **oblicuos**. Un prisma es recto si sus caras laterales son perpendiculares a las bases. De otro modo, si las caras laterales no son perpendiculares a las bases, el prisma es oblicuo.

En cualquier prisma se puede calcular el área lateral, el área total y el volumen.



Prisma recto Prisma oblicuo

El **área lateral** (A_L) de un prisma es la suma de las áreas de las caras laterales y corresponde al producto de la altura del prisma por el perímetro de una de las bases.

$$A_L = hP_B$$

El **área total** (A_T) del prisma es la suma del área de las dos bases y el área lateral del prisma.

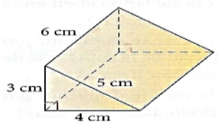
$$A_T = A_L + 2A_B$$

El **volumen** (V) del prisma es el producto del área de la base por la altura del prisma.

$$V = A_B \cdot h$$

Ejemplo

Calcular el área lateral, el área total y el volumen del siguiente prisma triangular.



Para calcular el área lateral del prisma se calcula el perímetro de la base y se multiplica por la altura.

$P_B = 3\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm} = 12\text{ cm}$

$A_L = h \cdot P_B = 6\text{ cm} \cdot 12\text{ cm} = 72\text{ cm}^2$

Para calcular el área total del prisma se calcula el área de la base. Luego, se suma el área lateral con el doble del área de la base.

$A_B = \dfrac{3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 6\text{ cm}^2$

$A_T = A_L + 2A_B = 72\text{ cm}^2 + 2 \cdot 6\text{ cm}^2 = 84\text{ cm}^2$

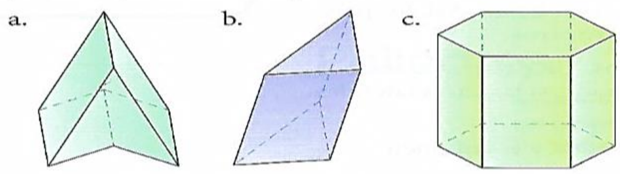
Finalmente, para calcular el volumen del prisma se multiplica el área de la base por la altura.

$V = A_B \cdot h = 6\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^3$

Actividades

Interpreta: 1 Ejercita: 2-3 Razona: 4

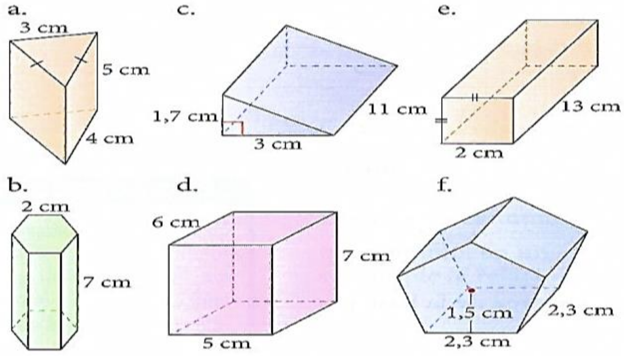
1 Determina cuáles de las siguientes figuras son prismas. Justifica tu respuesta.



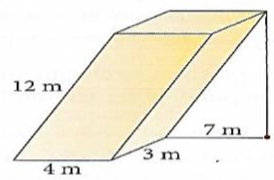
2 Completa la siguiente tabla, para ello, aplica la fórmula de Euler.

	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro		4	6
Cubo	6	8	
Octaedro		6	12
Dodecaedro	12		30
Icosaedro	20	12	

3 Encuentra el área lateral, el área total y el volumen de cada uno de los prismas.



4 Halla el área total y el volumen del siguiente prisma oblicuo.



Soluciona problemas

5 El empaque de un perfume es una caja en forma de prisma hexagonal y la etiqueta ocupa completamente tres de las caras laterales del empaque. Si la base es un hexágono regular de lado 3 cm y la altura del empaque es 15 cm, ¿cuál es la cantidad de etiqueta que se requiere para la elaboración de 6 cajas de perfume?

6 Un recipiente en forma de prisma rectangular tiene 6 cm de ancho, 10 cm de largo y contiene agua hasta una altura de 5 cm. Al colocar una piedra en el interior del recipiente la altura aumenta en 1,5 cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?

7 Una caja rectangular mide 4 cm de ancho por 3 cm de alto por 2 cm de largo. Con respecto a esta caja responde:

a. ¿Cuántos cubos de 1 cm de lado caben en la caja?

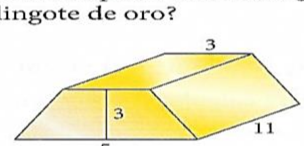
b. ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado caben en la caja?

c. ¿Cuántos cubos de $\frac{1}{2}$ cm de lado caben en la caja?

d. Si las dimensiones de la caja se duplican, ¿en cuánto aumenta el área total de la superficie de la caja?

e. Si las dimensiones de la caja se duplican, ¿en cuánto aumenta el volumen de la caja?

8 Los lingotes de oro tienen la forma de un prisma cuya base es un trapecio isósceles. ¿Cuál es el volumen del lingote de oro?



Pirámide

Una **pirámide** es un poliedro en el cual una de sus caras, llamada *base*, es un polígono y las otras caras, llamadas *caras laterales*, siempre son triángulos que concurren en un vértice común.

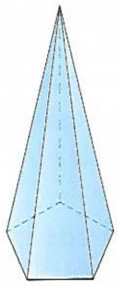
RECUERDA QUE...

El área de un triángulo se calcula como:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

Donde b es la base y h la altura del triángulo.

Las pirámides se clasifican según el polígono que corresponde a su base, en pirámide triangular, hexagonal, pentagonal, entre otras. Además, una pirámide puede ser **recta** u **oblicua**. Una pirámide es **recta** si todas sus caras laterales son triángulos isósceles y es **oblicua** si alguna de sus caras laterales es un triángulo escaleno.



Pirámide pentagonal recta

En una pirámide se puede calcular el área correspondiente a la superficie de las caras, el área total de la superficie que la conforma y el volumen.

El **área lateral** (A_L) de una pirámide es la suma de las áreas de las caras laterales. Así, si n es el número de lados de la base y A es el área de una de las caras laterales, se tiene que:

$$A_L = nA$$

El **área total** (A_T) de una pirámide es la suma del área de la base y el área lateral.

$$A_T = A_B + A_L$$

El **volumen** (V) de una pirámide es la tercera parte del producto del área de la base y la altura de la pirámide.

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$$

Ejemplo

Calcular el área lateral y el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado 4 cm y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros.

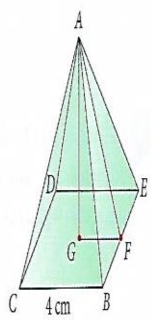


Figura 1

Para calcular el área lateral se halla el área del $\triangle EBA$ y se multiplica por el número de lados de la base así:

Primero, se utiliza el teorema de Pitágoras para hallar la altura del $\triangle EBA$ (figura 1).

$$AF = \sqrt{(4\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2} = \sqrt{16\text{ cm}^2 - 4\text{ cm}^2} = \sqrt{12\text{ cm}^2} \approx 3{,}46\text{ cm}$$

Luego, se calcula el área del $\triangle EBA$.

$$A_\Delta = \frac{(4\text{ cm})(3{,}46\text{ cm})}{2} = \frac{13{,}84}{2}\text{ cm}^2 = 6{,}92\text{ cm}^2$$

Finalmente, se halla el área lateral, para ello se multiplica por 4 el área del $\triangle EBA$.

$$A_L = 4(6{,}92\text{ cm}^2) = 27{,}68\text{ cm}^2$$

Para encontrar el volumen se realiza lo siguiente:.

Primero, se calcula la altura de la pirámide mediante el teorema de Pitágoras, así:

$$AG = \sqrt{(3{,}46\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2} = \sqrt{11{,}97\text{ cm}^2 - 4\text{ cm}^2} = \sqrt{7{,}97\text{ cm}^2} \approx 2{,}82\text{ cm}$$

Luego, se multiplica un tercio del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h) = \frac{1}{3}(16\text{ cm}^2 \cdot 2{,}82\text{ cm}) = \frac{1}{3}(45{,}12\text{ cm}^3) = 15{,}04\text{ cm}^3$$

Actividades

Interpreta: 1 | Ejercita: 2-3-5 | Razona: 4-6-8-9 | Modela: 7

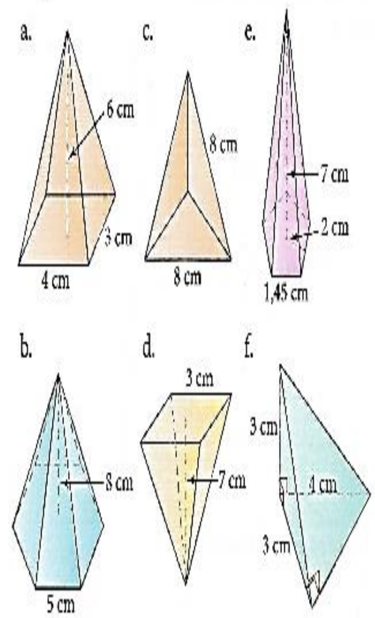
1 Con base en una pirámide de base cuadrada, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué pasa con el volumen si se duplican las medidas de los lados de la base?

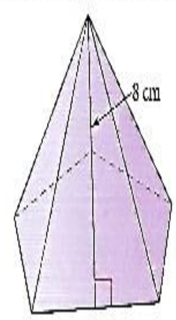
b. ¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide y el de una pirámide con la misma base y una altura que es el doble de la pirámide inicial?

c. ¿En cuánto aumenta el volumen de la pirámide si se duplica el área de la base?

2 Calcula el área lateral, el área total y el volumen de las pirámides.



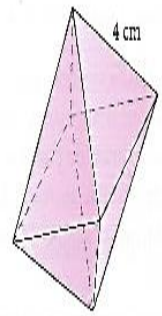
3 Calcula el área total y el volumen de la siguiente pirámide, si se sabe que la base es la mitad de un hexágono regular cuyo lado mide 6 cm.



4 Dos pirámides con base cuadrada tienen la misma altura. Si la medida de los lados de los cuadrados de la base son 4 cm y 5 cm, respectivamente, ¿qué relación existe entre sus volúmenes?

5 Halla la altura de una pirámide si se conoce que su volumen es 12 cm³ y el área de su base es 24 cm².

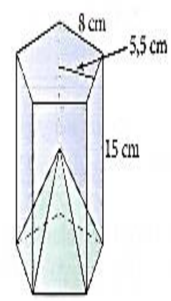
6 Calcula el volumen del siguiente octaedro.



7 Determina las expresiones que permiten calcular el área lateral, el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada si se sabe que sus aristas son congruentes.

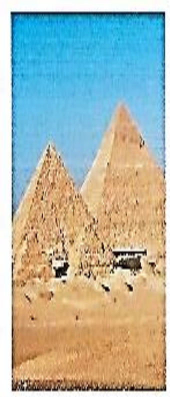
Soluciona problemas

8 Calcula la diferencia entre el volumen del prisma y el volumen de la pirámide, considerando que tienen la misma base y la altura de la pirámide es la mitad de la altura del prisma.



9 Calcula el área total de una pirámide cuya base es un hexágono regular de lado 6 cm y cuya altura mide 8 cm.

10 La pirámide de Keops tiene como medidas aproximadas 230,3 m de lado y 146,6 m de altura. Las autoridades egipcias, preocupadas por el deterioro de las pirámides, decidieron aplicarles un impermeabilizante sobre las paredes.



a. ¿Cuántos metros cuadrados de impermeabilizante se requieren para proteger la pirámide de Keops?

b. ¿Cuál es el volumen de la pirámide de Keops, aproximadamente?

Cuerpos redondos

Un **cuerpo redondo** es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies planas y curvas. Los principales cuerpos redondos son: el cilindro, el cono y la esfera.

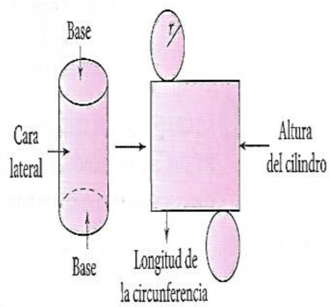
Buenaventura Cavalieri (1598-1647)

Geómetra y matemático italiano. Fue discípulo de Galileo, quien lo llamó el nuevo Arquímedes. Realizó la primera demostración del teorema de Papus, que habla sobre el volumen de un sólido de revolución.

Cilindro

> Un **cilindro** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

La superficie curva que conforma el cilindro se denomina *cara lateral* y las dos caras circulares se denominan *bases*.



Al efectuar el desarrollo de un cilindro se puede observar que la cara lateral pertenece a un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia que corresponde a la base y cuyo ancho es la altura del cilindro.

Por tanto, si h es la altura del cilindro y r el radio de la base se tiene que:

El **área lateral** del cilindro corresponde al área del rectángulo que representa su desarrollo.

$$A_L = (2 \cdot \pi \cdot r)h$$

El **área total** del cilindro es la suma del área de las dos bases y el área lateral.

$$A_T = A_L + 2A_B = (2 \cdot \pi \cdot r)h + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = (2 \cdot \pi \cdot r)(h + r)$$

El **volumen** del cilindro es el producto del área de la base por la altura del cilindro.

$$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Ejemplo

Calcular el área lateral, el área total y el volumen de un cilindro de radio 3 cm y altura 4 cm.

Se remplazan las medidas del radio y de la altura en las expresiones correspondientes al área lateral, al área total y al volumen del cilindro. Luego, se realizan las operaciones indicadas así:

Área lateral

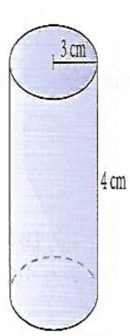
$$A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 75{,}36 \text{ cm}^2$$

Área total

$$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 \text{ cm} \cdot (4 \text{ cm} + 3 \text{ cm}) = 131{,}88 \text{ cm}^2$$

Volumen

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot (3 \text{ cm})^2 \cdot 4 \text{ cm} = 113{,}04 \text{ cm}^3$$



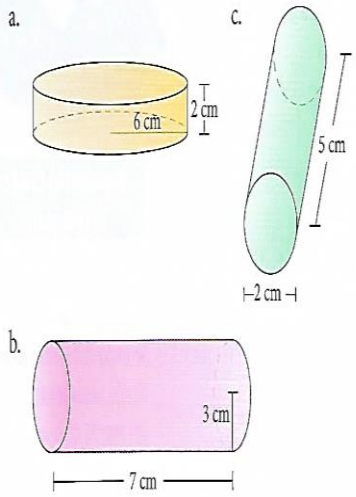
RECUERDA QUE...

La longitud de una circunferencia se calcula con la fórmula $l = 2\pi r$, donde r es la medida del radio de la circunferencia.

Actividades

Ejercita: 1-2 Razona: 3-4-5-6

1. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de los cilindros.



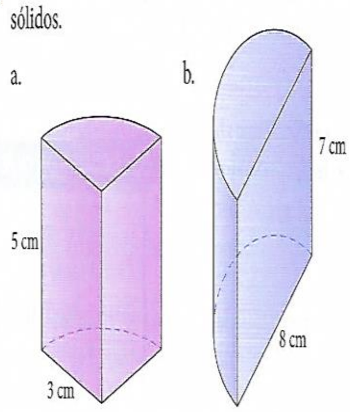
2. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de los cilindros, teniendo en cuenta las condiciones dadas.
   a. El radio de la base del cilindro es 0,9 m y su altura es 30 cm.
   b. El diámetro de la base del cilindro es 14 cm y su altura es 7 cm.
   c. El área de la base es 144π cm^2 y la altura es 10 cm.
   d. El valor del área lateral es igual al valor del volumen y la altura mide 5 cm.

3. Halla el radio de la base de un cilindro si su volumen es 48π cm^3 y su altura es 3 cm.

4. Halla el volumen de un cilindro que tiene 5 cm de radio y un área lateral de 70π cm^2.

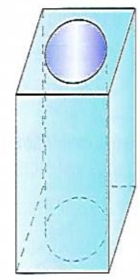
5. Calcula la altura de un cilindro si su área lateral es 75,36 cm^2 y el radio de su base es 4 cm.

6. Calcula el área total y el volumen de los siguientes sólidos.



Soluciona problemas

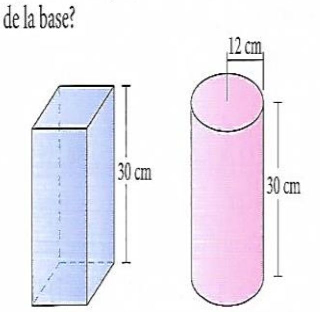
7. A una caja cúbica de lado 15 cm se le hizo un hueco en forma de cilindro con un radio de 5 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja con el hueco?



8. En una empresa de enlatados se utilizan recipientes con forma cilíndrica para empacar arvejas como se muestra a continuación.

   a. ¿Cuál de los dos recipientes tiene mayor capacidad?
   b. ¿En cuál de los dos recipientes se utiliza mayor cantidad de hojalata para su elaboración?
   c. Si en cada recipiente la etiqueta cubre toda la cara lateral, ¿en cuál de las dos etiquetas se utiliza mayor cantidad de papel?

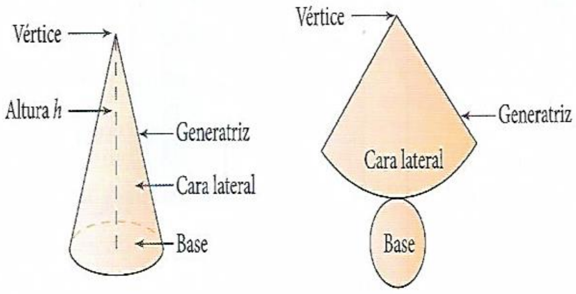
9. Una empresa empaca pañuelos faciales en cajas con forma cilíndrica de radio 12 cm y altura 30 cm. Debido a los costos del empaque se cambiará su presentación y ahora se utilizarán cajas rectangulares, de tal forma que se conserve la altura del empaque anterior y la base sea cuadrada. Para que la caja rectangular tenga la misma capacidad de la caja cilíndrica, ¿cuál debe ser la medida del lado de la base?



Cono

Un **cono** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular.

El cono está conformado por los siguientes elementos: cara lateral, base, vértice, altura y generatriz. La **generatriz** es el segmento que tiene como puntos extremos el vértice del cono y un punto de la circunferencia de la base. La altura es la medida del segmento perpendicular a la base, cuyo punto extremo es el vértice del cono.



Si se simboliza con r el radio de la base del cono, con g la generatriz del cono y con h su altura, se tiene que:

El **área lateral** del cono corresponde al área del sector circular que resulta de su desarrollo.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g$$

El **área total** del cono es la suma del área de la base y el área lateral.

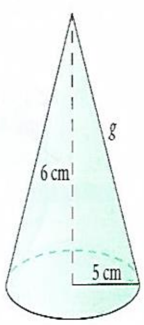
$$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot r \cdot g + \pi r^2 = \pi \cdot r \cdot (g + r)$$

El **volumen** del cono es un tercio del producto del área de la base por la altura.

$$V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h) = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h)$$

Ejemplo

Calcular la medida de la generatriz, el área lateral, el área total y el volumen de un cono cuyo radio es 5 cm y su altura es 6 cm.



Para hallar la medida de la generatriz se aplica el teorema de Pitágoras.

$$g = \sqrt{(6\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2} = \sqrt{36\text{ cm}^2 + 25\text{ cm}^2} = \sqrt{61\text{ cm}^2} \approx 7{,}81\text{ cm}$$

Luego, se remplazan las medidas del radio, la altura y la generatriz para calcular el área lateral, el área total y el volumen.

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = 3{,}14 \cdot 5\text{ cm} \cdot 7{,}81\text{ cm} = 122{,}617\text{ cm}^2$$

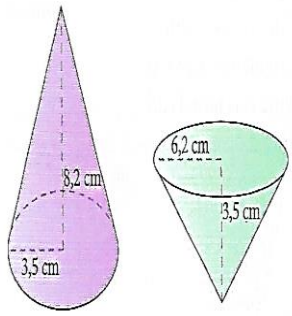
$$A_T = \pi \cdot r \cdot (g + r) = 3{,}14 \cdot 5\text{ cm} \cdot (7{,}81\text{ cm} + 5\text{ cm}) = 201{,}11\text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3}(\pi \cdot r^2 \cdot h) = \frac{1}{3}(3{,}14 \cdot (5\text{ cm})^2 \cdot 6\text{ cm}) = 157\text{ cm}^3$$

Actividades

Interpreta: 1 · Ejercita: 2-5-6 · Razona: 3-4-7

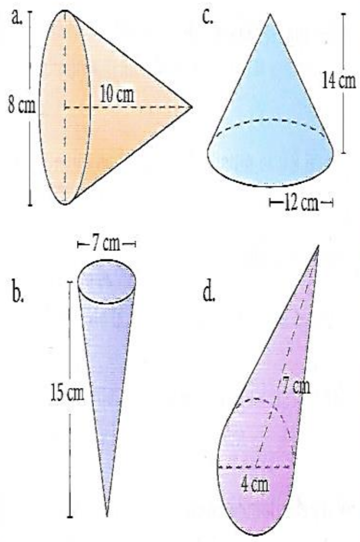
1 Compara los dos conos y responde.



a. ¿Cuál de los conos tiene menos capacidad?

b. ¿Cuál requiere menos material en su elaboración?

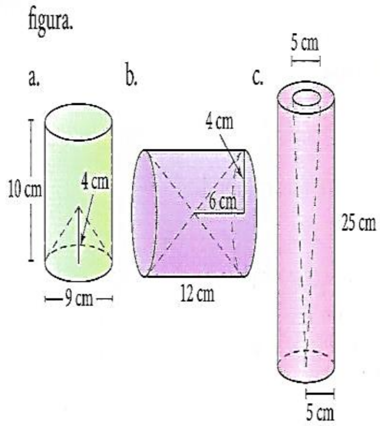
2 Calcula el área lateral, el área total y el volumen de los conos.



3 Halla el radio y la generatriz del cono que tiene un volumen de 6π cm³ y una altura de 2 cm.

4 Halla el volumen de un cono si su área lateral es 15π cm² y su área total es 24π cm².

5 Calcula la diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen de los conos que aparecen en cada figura.

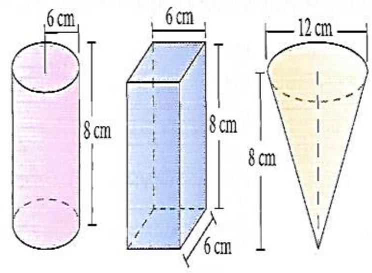


6 Cuál de los siguientes cuerpos geométricos tiene:

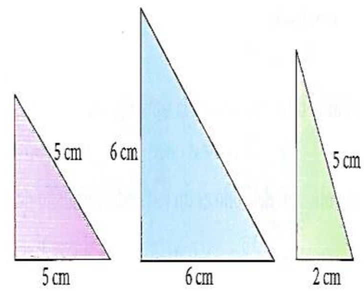
a. Mayor volumen.

b. Mayor área lateral.

c. Mayor área total.

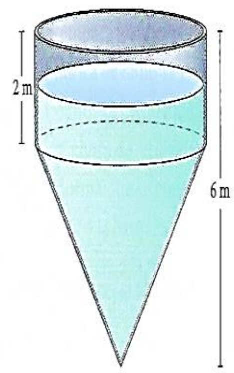


7 Cuando se hace girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos se genera un cono. Determina el área total del cono que se genera al girar cada triángulo rectángulo sobre el cateto de color rojo.



Soluciona problemas

8 El siguiente es un tanque donde se almacena el agua para el riego en época de sequía. Si el radio de la base mide 2,5 m, responde:



a. ¿Cuál es la capacidad del tanque?

b. Si el agua que hay en el tanque marca una altura de 5 m, ¿cuánta agua hay en el tanque?

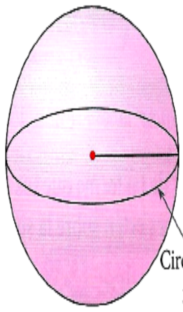
c. Si un litro de agua pesa 1 kg, ¿cuánto pesa el agua del tanque cuando está lleno? (Recuerda que 1 litro equivale a 1 dm³.)

Esfera

Una **esfera** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva. Todos los puntos de la superficie de la esfera equidistan de un punto llamado *centro*.

La distancia entre un punto de la superficie de la esfera y el centro se denomina **radio**.

La intersección de la superficie de la esfera con un plano que pasa por su centro se denomina **circunferencia máxima** y el círculo determinado por esta se denomina **círculo máximo**.



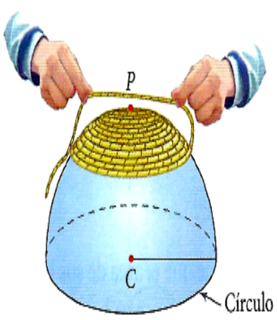
Si se representa con r el radio de la esfera se tiene que:

El **área de la superficie de la esfera** es cuatro veces el área del círculo máximo.

$$A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Para deducir la expresión $A_T = 4\pi r^2$ se realizan los siguientes pasos:

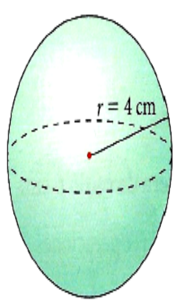
- Primero, se enrolla una pita alrededor de la superficie de una semiesfera.
- Segundo, se mide la longitud de la pita utilizada.
- Luego, se enrolla la pita desde el centro del círculo máximo y se mide.
- Finalmente, se comparan ambas medidas.



Con este procedimiento se comprueba que la cantidad de pita que se utiliza para enrollar la superficie de la semiesfera, es el doble de la cantidad de pita utilizada para enrollar el círculo máximo. De donde se deduce que el área de la superficie de la semiesfera es $A_S = 2\pi r^2$. Por tanto, el área de la superficie total de la esfera es $A_T = 2(2\pi r^2) = 4\pi r^2$.

Ejemplo

Calcular el área de la superficie de una esfera de diámetro 8 cm.



Como la esfera tiene un diámetro de 8 cm su radio es 4 cm. Luego, se remplaza la medida del radio en la expresión $A_T = 4\pi r^2$, de donde se obtiene que:

$$A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot (4\text{ cm})^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 16\text{ cm}^2 = 200{,}96\text{ cm}^2$$

Por tanto, el área de la superficie de la esfera es aproximadamente 200,96 cm².

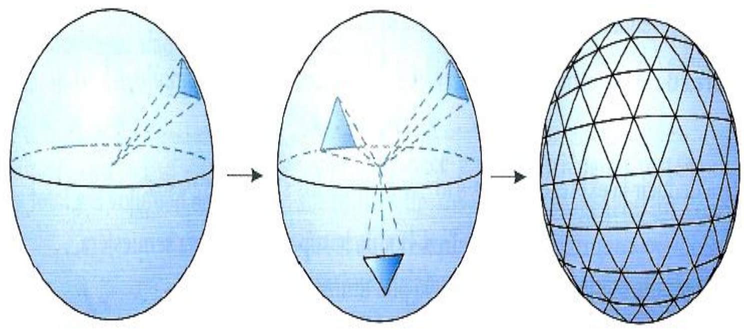
Volumen de la esfera

El **volumen de la esfera** se calcula mediante la expresión:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Donde r es el radio de la esfera.

Para deducir la expresión $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ se construyen pirámides triangulares congruentes, de tal forma que sus vértices concurran en el centro de la esfera y los vértices de sus bases estén sobre la superficie de la esfera.



El volumen de cada pirámide es $V = \frac{1}{3}A_B \cdot h$, de donde la suma del volumen de todas las pirámides es $V = \frac{1}{3}A_{B_1} \cdot h + \frac{1}{3}A_{B_2} \cdot h + ... + \frac{1}{3}A_{B_n} \cdot h$.

Esta expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$V = \frac{1}{3} \cdot h(A_{B_1} + A_{B_2} + ... + A_{B_n})$$

A medida que se aumenta el número de pirámides, se tiene que el área de sus bases se va haciendo igual al área de la superficie de la esfera, y su altura se va haciendo igual al radio de la esfera. Por tanto, la fórmula anterior se transforma en:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot A_T$$

Luego, se remplaza el área de la superficie de la esfera.

$$V = \frac{1}{3} \cdot r \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Finalmente, se simplifica la expresión.

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

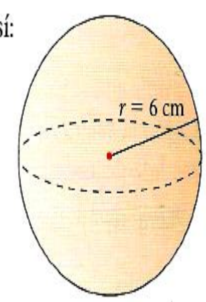
Ejemplo

Calcular el volumen de una esfera de radio 6 cm.

Se remplaza el radio y se realizan las operaciones indicadas así:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot (6\text{ cm})^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 216\text{ cm}^3$$

$$= \frac{2.712{,}96}{3}\text{ cm}^3 = 904{,}32\text{ cm}^3$$



Por tanto, el volumen de la esfera es de 904,32 cm³.

EN SÍNTESIS...

Cuerpos geométricos

Un **cuerpo geométrico** es una parte del espacio limitada por superficies planas o curvas. Los cuerpos geométricos se clasifican en poliedros y en cuerpos redondos.

Un **poliedro** es un sólido limitado por superficies planas denominadas *caras*.

Un **cuerpo redondo** es un sólido limitado por superficies curvas o por superficies planas y curvas.

Pirámide

Una **pirámide** es un poliedro en el cual una de sus caras, llamada *base*, es un polígono y las otras caras, llamadas *caras laterales*, siempre son triángulos que concurren en un vértice común.

- Área lateral: $A_L = nA$, donde A es el área de una cara lateral y n es el número de lados de la base.
- Área total: $A_T = A_B + A_L$
- Volumen: $V = \frac{1}{3}(A_B \cdot h)$

Cilindro

Un **cilindro** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y dos caras planas circulares.

- Área lateral: $A_L = 2\pi rh$, donde h es la altura y r el radio de la base.
- Área total: $A_T = A_L + 2A_B = (2\pi r)(h + r)$
- Volumen: $V = A_B \cdot h = \pi r^2 h$

Esfera

Una **esfera** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva.

- Área de la superficie: $A_T = 4\pi r^2$, donde r es el radio de la esfera.
- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Cono

Un **cono** es un cuerpo redondo limitado por una superficie curva y una cara plana circular.

- Área lateral: $A_L = \pi rg$, donde r es el radio de la base y g es la medida de la generatriz.
- Área total: $A_T = A_L + A_B = \pi r(g + r)$
- Volumen: $V = \frac{1}{3}A_B h = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Prisma

Un **prisma** es un poliedro limitado por dos polígonos congruentes y paralelos llamados *bases* y varios paralelogramos llamados *caras laterales*.

- Área lateral: $A_L = hP_B$, donde h es la altura y P_B es el perímetro de la base.
- Área total: $A_T = A_L + 2A_B$, donde A_B es el área de la base.
- Volumen: $V = A_B \cdot h$

Tronco de pirámide

Un **tronco de pirámide** es la parte de un cono comprendida entre la base y un plano paralelo a esta.

- Área lateral: $A_L = \frac{P + P'}{2} \cdot a$, donde P es el perímetro de la base mayor, P' es el perímetro de la base menor y a es la apotema.
- Área total: $A_T = \frac{P + P'}{2} \cdot a + A + A'$, donde A es el área de la base mayor y A' es el área de la base menor.
- Volumen: $V = \frac{h}{3} \cdot (A + A' + \sqrt{A \cdot A'})$.

Tronco de cono

Un **tronco de cono** es la parte de un cono comprendida entre la base y un plano paralelo a esta.

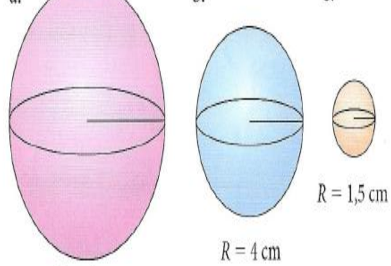
- Área lateral: $A_L = \pi g(R + r)$, donde g es la medida de la generatriz, R es el radio de la base mayor y r es el radio de la base menor.
- Área total: $A_T = \pi[g(R + r) + R^2 + r^2]$
- Volumen: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$.

Actividades

Ejercita: 1-2-3-7 Razona: 4-5-6-8

1 Calcula el área de la superficie y el volumen de las esferas.

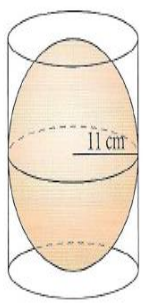
a. b. c.



2 Encuentra el área de una esfera que tiene un volumen de 36π cm³.

3 Halla el volumen de una esfera cuya superficie tiene un área de 49π cm².

4 Una esfera de radio 11 cm está inscrita en el cilindro, como se muestra en la figura. Determina:

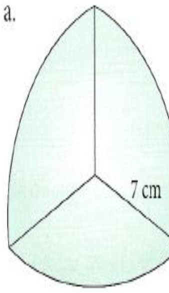


a. El volumen de la esfera.
b. El área total del cilindro.
c. El área de la superficie de la esfera.

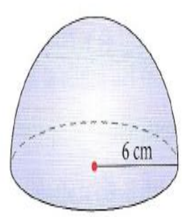
5 Determina la razón entre el volumen de dos esferas y la razón entre el área de sus superficies, si el radio de una esfera es la mitad del radio de la otra.

6 Calcula el volumen y el área de la superficie de los siguientes cuerpos geométricos.

a.

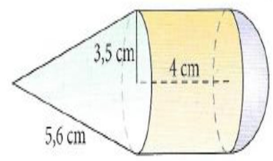


b.



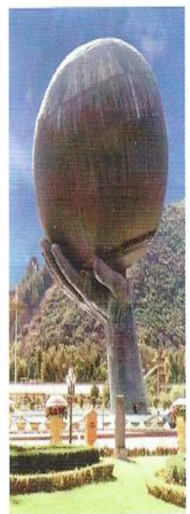
7 El área de la superficie de un cubo y de una esfera es 216 cm². Determina cuál de los dos tiene mayor volumen.

8 Halla el área y el volumen del siguiente cuerpo geométrico.



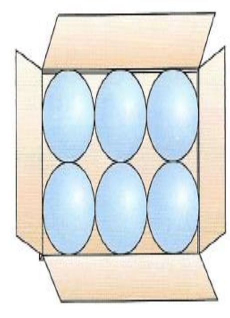
Soluciona problemas

9 En la entrada al parque Jaime Duque (Cundinamarca) se encuentra un monumento que fue realizado como un homenaje a Dios. Este monumento es una mano que sostiene una esfera, la cual representa el mundo. El diámetro de la esfera es de 25 metros y la altura del monumento es de 30 metros.



a. Si se decide cubrir la superficie de la esfera con una pintura protectora, ¿cuál es la cantidad de pintura que se requiere?
b. ¿Cuál es la capacidad de esta esfera?
c. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia máxima de la esfera?

10 Se empacan esferas de radio 2 cm en cajas rectangulares. Si se desea empacar doce esferas de tal forma que queden seis encima de las otras seis como se muestra en la figura, responde:



a. ¿Cuáles son las dimensiones mínimas que debe tener la caja?
b. Si se va a rellenar con arena los espacios que quedaron vacíos en la caja, ¿cuántos centímetros cúbicos de arena se necesitan?

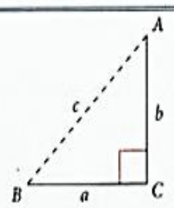
SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Solución de triángulos rectángulos

La trigonometría es de gran utilidad en la solución de problemas de medición de longitudes difíciles para el ser humano, tales como la altura de las montañas, la altura de árboles y la anchura de ríos y lagos, entre otros.

Resolver un **triángulo rectángulo** significa hallar la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos interiores.

Los lados del triángulo ABC son a, b y c.
Los ángulos interiores son $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.
Cuando se tiene un triángulo rectángulo para resolver, se pueden presentar dos casos: cuando se conocen un lado y un ángulo o cuando se conocen dos lados.



Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen un lado y un ángulo

Cuando se conocen el valor de un ángulo y la medida de un lado, se plantea una ecuación de acuerdo con la definición de las relaciones trigonométricas en la que alguno de los lados desconocidos es la incógnita y se hallan los demás datos utilizando las propiedades de los triángulos.

Las siguientes son las posibles situaciones que se pueden presentar cuando se conoce un lado y un ángulo.

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conoce un cateto y cualquier ángulo diferente al ángulo recto

Por ejemplo, resolver el triángulo ABC con el ángulo recto en C, con $a = 5$ m y $\measuredangle B = 35°$.

- Primero, se construye el triángulo ABC con los datos indicados (figura 1).
- Segundo, se plantea una ecuación con la razón trigonométrica que asocia a los dos catetos. Luego, se despeja la variable desconocida, así:

$$\tan 35° = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 5 \tan 35° \Rightarrow b \approx 3{,}5 \text{ m}$$

- Tercero, para hallar la hipotenusa se utiliza el teorema de Pitágoras. Para ello se remplazan los valores conocidos, se efectúan las operaciones y se despeja la hipotenusa.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{5^2 + 3{,}5^2} \Rightarrow c \approx 6{,}1$$

- Cuarto, para hallar el valor del $\measuredangle A$ se plantea una ecuación utilizando la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo y se despeja el valor del ángulo. $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180° \Rightarrow \measuredangle A = 180° - (35° + 90°) \Rightarrow \measuredangle A = 55°$.

Por lo tanto, los elementos del triángulo ABC son: $a = 5$ m, $b \approx 3{,}5$ m, $c \approx 6{,}1$ m, $\measuredangle A = 55°$, $\measuredangle B = 35°$ y $\measuredangle C = 90°$.

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen la hipotenusa y un ángulo diferente al ángulo recto

Por ejemplo, para resolver el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C, $c = 8$ m y $\measuredangle A = 25°$ (figura 2):

- Primero, se construye el triángulo ABC con los datos indicados.
- Segundo, se plantea la razón trigonométrica que relaciona el cateto opuesto, el ángulo dado y la hipotenusa, luego se despeja la variable desconocida, así:

$$\text{sen } 25° = \frac{a}{8} \Rightarrow a = 8 \text{ sen } 25° \Rightarrow a \approx 3{,}4 \text{ m}$$

- Tercero, se determina el valor del otro cateto. Para obtener el cateto b se usa una razón trigonométrica y se despeja b, así:

$$\cos 25° = \frac{b}{8} \Rightarrow b = 8 \cos 25° \Rightarrow b \approx 7{,}2 \text{ m}$$

- Cuarto, se halla el valor del ángulo que falta ($\measuredangle B$), para ello se plantea una ecuación de acuerdo con la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180° \Rightarrow \measuredangle B = 180° - (25° + 90°) \Rightarrow \measuredangle B = 65°$$

Por lo tanto, los elementos del triángulo ABC son $a \approx 3{,}4$ m, $b \approx 7{,}2$ m, $c = 8$ m, $\measuredangle A = 25°$, $\measuredangle B = 65°$ y $\measuredangle C = 90°$.

Resolución de un triángulo rectángulo cuando se conocen dos lados

Cuando se conocen dos lados del triángulo rectángulo, se usan las **funciones trigonométricas** inversas para poder determinar el valor de los ángulos desconocidos. El tercer lado se determina utilizando el **teorema de Pitágoras**.

Por ejemplo, para resolver el triángulo ABC con ángulo recto en C y cuyos catetos miden 5 cm y 7 cm respectivamente, se realiza lo siguiente:

- Primero, se dibuja un triángulo rectángulo con los datos dados (figura 3).
- Segundo, se plantea la razón trigonométrica que asocia los dos catetos y se halla el $\measuredangle A$.

$\tan A = \frac{5}{7} \approx 0{,}71$

$\measuredangle A = \arctan 0{,}71 \approx 35{,}5°$ *Se remplazan los datos y se despeja el $\measuredangle B$.*

- Tercero, se despeja el $\measuredangle B$ de la ecuación $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$

$\measuredangle B = 180° - (90° + 35{,}5°)$

$\measuredangle B = 54{,}5°$ *Se halla el ángulo cuya tangente es 0,71.*

- Luego, para hallar la hipotenusa c, se plantea el teorema de Pitágoras y se remplazan los datos conocidos.
- Finalmente, se despeja c.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 5^2 + 7^2 \Rightarrow c = \sqrt{25 + 49} \Rightarrow c = 8{,}6 \text{ cm}$$

Los elementos del triángulo ABC son $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c \cong 8{,}6$ cm, $\measuredangle A \approx 35{,}5°$, $\measuredangle B \approx 54{,}5°$ y $\measuredangle C = 90°$.

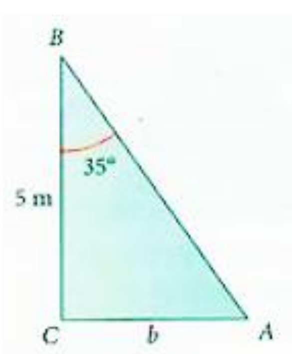


Figura 1

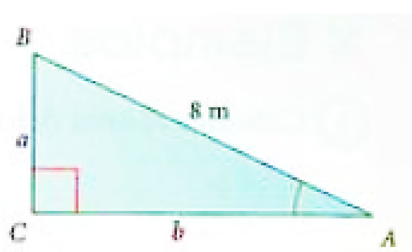


Figura 2

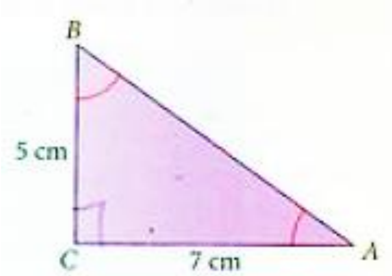


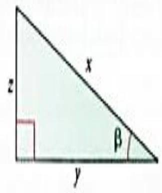
Figura 3

EJEMPLOS Y ACTIVIDAD SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Actividades

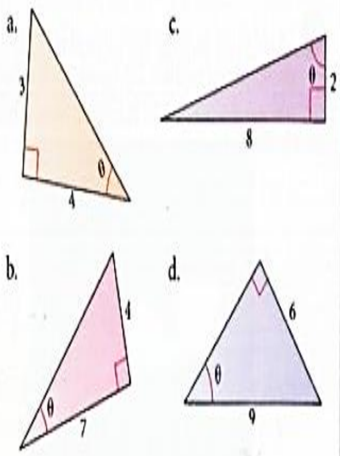
Recupera inf.: 1-2 | Ejercita: 3-4 | Razona: 5-6-7 | Modela: 8-9-10

1 Escribe las razones trigonométricas para el ángulo β del siguiente triángulo.

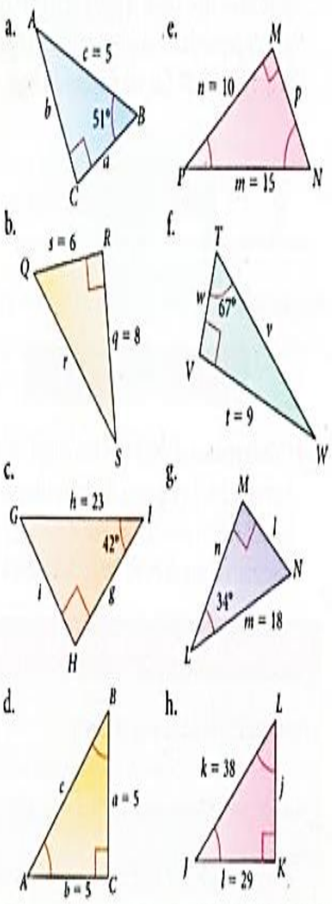


2 Responde, ¿a cuántos pies equivale un metro?

3 Encuentra el valor de las razones trigonométricas para el ángulo θ en cada triángulo.



4 Resuelve los siguientes triángulos rectángulos.



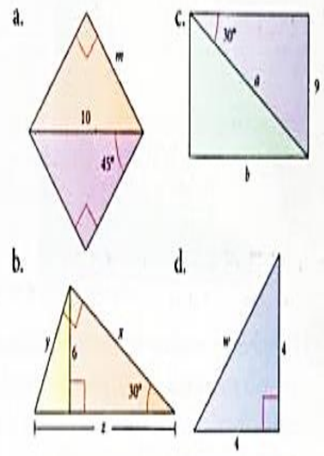
5 Resuelve.

Dos ángulos complementarios de un triángulo rectángulo están relacionados así: "uno de ellos es cinco veces mayor que cuatro veces el otro". Si el lado opuesto al lado mayor es 8 cm, halla la medida de la hipotenusa.

6 Determina si la afirmación es falsa o verdadera para un triángulo ABC, con ángulo recto en C. Justifica tu respuesta.

a. $\text{sen } A < 1$
b. $\text{sen } B < \tan B$
c. $\text{sen } A < \csc B$
d. $\text{sen } A = \cos B$
e. $\text{sen } A + \text{sen } B = 1$
f. $\tan A \times \tan B = 1$

7 Encuentra el valor de la variable o las variables según sea el caso.

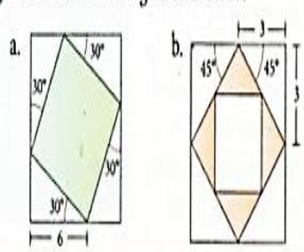


8 Demuestra que el perímetro de un octágono regular inscrito en un círculo de radio 3, está dado por

$$P = 48 \text{ sen}\left(\frac{180°}{8}\right)$$

9 Generaliza la demostración del punto anterior para un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio r.

10 Halla el área de la región sombreada.



Actividades

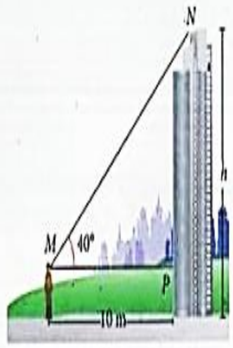
Razona: 11

11 Resuelve cada triángulo si es posible. De no ser así, explica la razón.

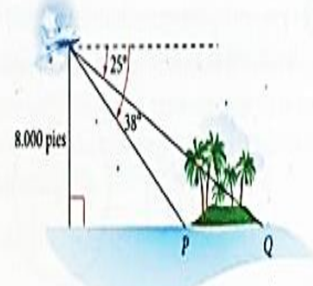
a. $\triangle ABC$, rectángulo en B; $c = 4$ cm, $A = 32°$
b. $\triangle MNP$, rectángulo en N; $n = 6$ cm, $p = 10$ cm
c. $\triangle XYZ$, rectángulo en Y; $x = 5$ cm, $y = 5\sqrt{2}$ cm
d. $\triangle HIJ$, rectángulo en H; $h = 8$ cm, $j = 10$ cm
e. $\triangle PQR$, rectángulo en R; $P = 58°$, $q = 6$ cm

Soluciona problemas

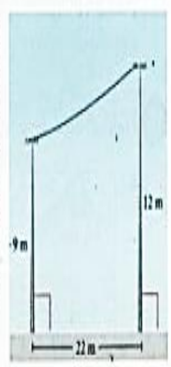
12 Para determinar la altura de una torre, José se ubica a 10 m de la torre y mide el ángulo de 40° como se muestra en la figura. Si la estatura de José es 1,74 m, determina la altura de la torre.



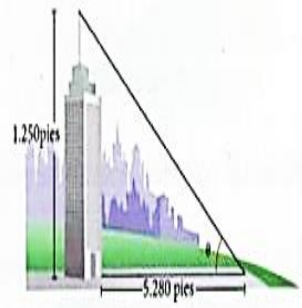
13 El copiloto del aeroplano representado en la figura y que vuela a una altura de 8.000 pies sobre el nivel del océano, descubre una isla. Calcula el ancho de la isla.



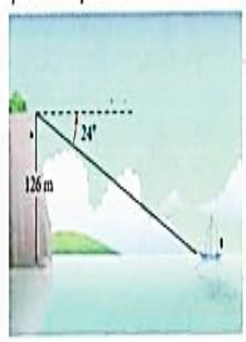
14 Un cable para teléfono se tiende, estrechamente, entre los postes como se muestra en la figura. ¿Cuál es la longitud del cable necesario para esta operación, si se requiere un 3% adicional para sujetar el cable?



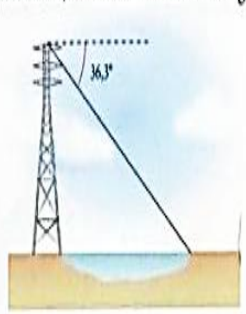
15 El edificio de Nueva York Empire State tiene 1.250 pies de altura. Encuentra el ángulo de elevación de su último piso desde un punto de la calle que está a 5.280 pies desde la base del edificio.



16 Desde el borde de un acantilado el ángulo de depresión de un velero es 24°. Encuentra la distancia que hay desde el pie del acantilado hasta el bote.



17 Una torre de 135 pies de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta al lago es de 36,3°. Calcula el ancho del lago.



18 Camilo practica *skateboard* en una rampa, cuya altura es de 3 m. La distancia, desde la parte más alta hasta donde termina la rampa en el piso es de 5 m. Encuentra el ángulo de elevación de la rampa.

Y esto que aprendí, ¿PARA QUÉ ME SIRVE?

Para determinar la altura de un cohete

En el lanzamiento de cohetes, se utiliza la función tangente de un ángulo de elevación para averiguar la altura a la que se encuentra en determinados tiempos.

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS
(ES DECIR TRIÁNGULOS QUE NO SON RECTÁNGULOS)
TEOREMA DEL SENO

Solución de triángulos oblicuángulos

En esta sección se estudiarán los triángulos oblicuángulos y dos teoremas que relacionan las razones trigonométricas para resolver este tipo de triángulos.

> Un **triángulo oblicuángulo** es aquel que tiene tres ángulos agudos, o dos ángulos agudos y un ángulo **obtuso**.

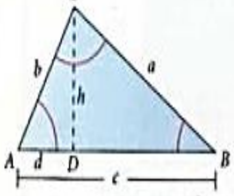
Cuando se tiene un triángulo oblicuángulo se pueden presentar los siguientes casos:
Caso 1: se conoce un lado y dos ángulos (LAA o ALA).
Caso 2: se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).
Caso 3: se conocen los tres lados del triángulo (LLL).
Caso 4: se conocen dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos (LAL).
Para resolver los triángulos anteriores se utilizan dos teoremas que son: la ley de seno y la ley de coseno.

Ley de seno

La ley del seno se utiliza para resolver un triángulo oblicuángulo en los casos 1 y 2 LAA o LLA.

> **Ley del seno**: para un triángulo con lados a, b y c y ángulos opuestos a cada lado $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ respectivamente, se cumple:
>
> $$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$
>
> Es decir, en todo triángulo oblicuángulo la medida de los lados es directamente proporcional al seno de los ángulos opuestos.

La ley del seno se puede demostrar de la siguiente manera:
En un triángulo ABC se traza una altura h, y se obtienen dos triángulos rectángulos ADC y DCB (figura).



Del triángulo ADC se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \times \operatorname{sen} A$$

Del triángulo DCB se tiene que:

$$\operatorname{sen} B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \times \operatorname{sen} B$$

Si se iguala h en las dos expresiones se tiene que: $b \times \operatorname{sen} A = a \times \operatorname{sen} B$.

Esto se puede expresar como: $\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b}$

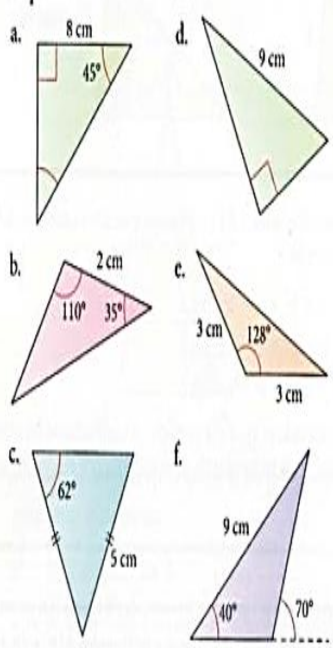
Si se repite el proceso trazando una altura desde el vértice A se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

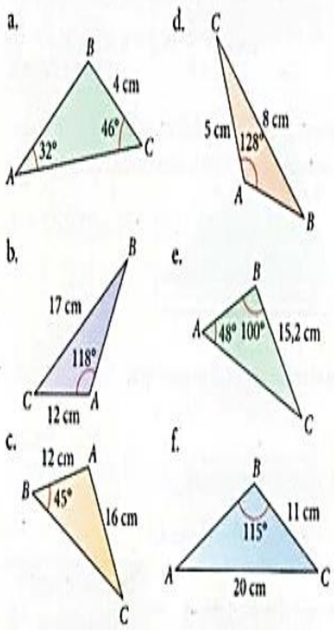
Actividades

Recupera información: 1 — Ejercita: 2-3

1 Identifica en cuáles de los siguientes casos usarías la ley de seno para resolver el triángulo. Justifica tu respuesta.



2 Resuelve los siguientes triángulos.



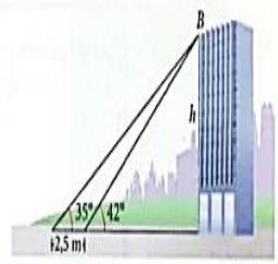
3 Halla el valor de b en cada triángulo.

a. $\measuredangle A = 50°$, $\measuredangle B = 67°$, $a = 7$ cm
b. $\measuredangle A = 44°$, $a = 18$ cm, $\measuredangle B = 86°$
c. $\measuredangle C = 88°$, $\measuredangle A = 55°$, $a = 14$ cm
d. $\measuredangle C = 95°$, $a = 9$ cm, $c = 12$ cm,
e. $\measuredangle A = 45°$, $a = 14$ cm, $c = 12$ cm
f. $\measuredangle A = 110°$, $a = 13$ cm, $c = 8$ cm
g. $\measuredangle A = 105°$, $c = 14$ cm, $a = 18$ cm

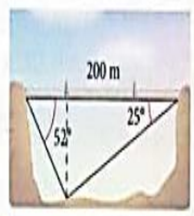
Soluciona problemas

4 En un paralelogramo $ABCD$ se cumple lo siguiente $BC = 109{,}53$ cm, $\measuredangle A = 102°$ y $AC = 80$ cm. Calcula la medida de $\overline{AB}$.

5 Determina la altura del edificio.

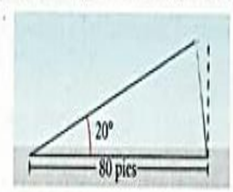


6 Calcula la altura a la que caminan dos viajeros cuando cruzan un desfiladero por un puente colgante como se muestra en la figura.

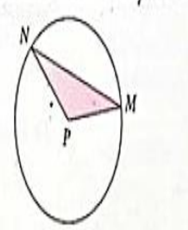


7 Un rodadero para niños en un parque tiene 30 pies de longitud y un ángulo de elevación de 36° con respecto al piso. La escalera para subir al rodadero mide 18 pies de largo. ¿Qué ángulo de elevación con respecto al piso tiene la escalera?

8 Un poste está inclinado 11° con respecto a la vertical del Sol. El poste emite una sombra de 80 pies de largo sobre el piso cuando el ángulo de elevación del Sol es de 20°. ¿Cuál es la longitud del poste?

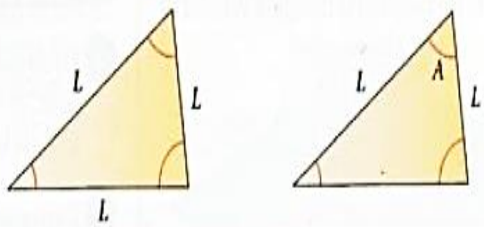


9 Determina el perímetro del triángulo isósceles MNP cuya NM base mide 15 cm y $\measuredangle N = 32°$.



Ley del coseno

La ley del coseno se utiliza para resolver un triángulo oblicuángulo cuando se presentan los casos 3 y 4, es decir, LLL y LAL.



Ley del coseno: para un triángulo con lados a, b y c y ángulos opuestos a cada lado $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$ respectivamente, se cumple:

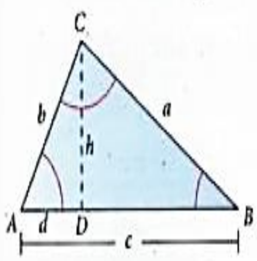
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

El cuadrado de la longitud de cada lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de las longitudes de estos lados por el ángulo que se forma entre ellos.

La demostración del teorema del coseno se basa en el teorema de Pitágoras. En un triángulo ABC se traza una altura h y se obtienen dos triángulos rectángulos ADC y DCB.

Del triángulo ADC se tiene que:

$$\operatorname{sen} A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \times \operatorname{sen} A \qquad \cos A = \frac{d}{b} \Rightarrow d = b \times \cos A$$



Por el teorema de Pitágoras en el triángulo DCB se tiene que:

$$a^2 = (c - d)^2 + h^2$$

Ya que $h = b \times \operatorname{sen} A$ y $d = b \times \cos A$, se tiene que:

$$a^2 = (c - d)^2 + h^2 \Rightarrow a^2 = (c - b \times \cos A)^2 + (b \operatorname{sen} A)^2$$

$$a^2 = c^2 - 2cb \times \cos A + b^2 \times \cos^2 A + b^2 \times \operatorname{sen}^2 A$$

Se resuelven todos los productos.

$$a^2 = c^2 - 2cb \times \cos A + b^2 (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A)$$

Se factoriza por factor común.

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \times \cos A$$

Se remplaza $\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A$ por 1.

De igual manera, se puede hacer la demostración para las otras igualdades.

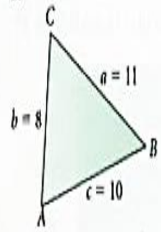
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Actividades

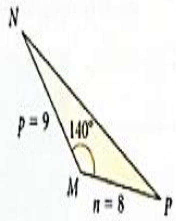
Ejercita: 1 Razona: 2

1 Encuentra la medida de los lados y los ángulos de cada triángulo.

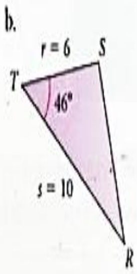
a.



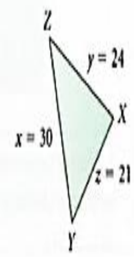
c.



b.



d.



e. $c = 12$ cm, $b = 3$ cm, $\measuredangle A = 48°$

f. $b = 10$ cm, $a = 7$ cm, $\measuredangle C = 104°$

g. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm

2 Utiliza la ley de los cosenos para demostrar que:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B}{b} = \frac{\cos C}{c}$$

Soluciona problemas

3 Los lados de un triángulo miden 7,2 cm, 8,6 cm y 3,9 cm. Encuentra la medida del ángulo menor.

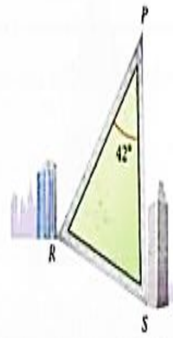
4 Encuentra el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 30 cm y el ángulo opuesto a la base mide 42°.

5 La distancia entre dos puntos X y Y no se puede medir directamente, pues entre ellos hay obstáculos. Se recurre a otro punto Z y se obtiene: $XZ = 25$ m, $YZ = 35$ m y $\measuredangle XZY = 74°$. Determina XY.

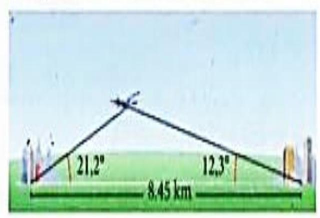
6 En un paralelogramo $PQRS$ se tiene que $PQ = 4$ cm, $QR = 2,5$ cm y $\measuredangle Q = 60°$. Calcula RP.

7 Un terreno triangular tiene lados de longitudes 5 m, 3 m y 2,5 m. Halla el ángulo de mayor medida.

8 Dos carreteras rectas se cruzan en un punto P formando un ángulo de 42°. En un punto R de una de las carreteras hay un edificio que está a 368 m de P, y en un punto S de la otra carretera, hay un edificio que está a 426 m de P. Determina la distancia entre R y S.



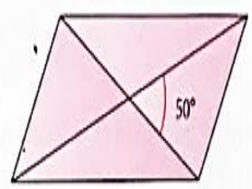
9 En un momento dado, cuando un avión estaba directamente arriba de una carretera recta que une a dos pueblos, los ángulos de elevación con respecto a estos pueblos eran 21,2° y 12,3°.



a. Determina las distancias del avión a cada uno de los pueblos en dicho instante, considerando una separación de 8,45 km entre los puntos representativos de los pueblos.

b. Determina la altitud del vuelo del avión en ese momento.

10 Las diagonales de un paralelogramo se cortan en los puntos medios respectivamente. Una de las diagonales mide 8 cm y la otra mide 6 cm, y el ángulo que se forma entre ellos es de 50°. Encuentra la medida de los lados del paralelogramo.



11 En un trapecio $ABCD$ isósceles, la base menor $AD = 2$ cm, la base mayor $BC = 4$ cm y $\measuredangle C = 55°$. Calcula la medida de la diagonal del trapecio.

ÁREA DE UN TRIANGULO Y SU ACTIVIDAD

Área de un triángulo

Una aplicación directa del teorema del seno es su uso para hallar el área de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

El área de un triángulo *ABC*, que tiene las medidas de dos lados y el ángulo entre ellos, está dada por la expresión:

$$A = \frac{bc \text{ sen } A}{2}$$

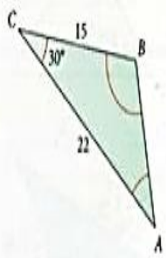
El área de un triángulo *MNP*, que tiene las medidas de los tres lados está dada por **la fórmula de Herón**:

$$A = \sqrt{r(r-m)(r-n)(r-p)}, \text{ donde } r = \frac{m+n+p}{2}$$

A *r* se le denomina el **semiperímetro** del triángulo.

Ejemplos

① Hallar el área del triángulo *ABC*, donde $a = 22$ cm, $b = 15$ cm y $\measuredangle C = 30°$.



Se tienen los datos de los lados y el ángulo que se forma entre ellos, por ello se usa la fórmula $A = \frac{ab \text{ sen C}}{2}$ para hallar el área del triángulo *ABC*.

$A = \frac{(22)(15) \text{ sen } 30°}{2}$ *Se remplazan en la fórmula los datos dados.*

$A = 82{,}5 \text{ cm}^2$ *Se realizan las operaciones indicadas.*

El área del triángulo *ABC* es $82{,}5 \text{ cm}^2$.

② Hallar el área de un triángulo cuyos lados miden 7 cm, 5 cm y 8 cm, respectivamente.

Como se tiene la medida de los tres lados del triángulo se utiliza la fórmula de Herón.

$r = \frac{7+5+8}{2} = 10$ cm *Se halla el semiperímetro de triángulo.*

$A = \sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}$ *Se remplazan los datos en las fórmulas de Herón.*

$A = \sqrt{10(3)(5)(2)} = \sqrt{300} \approx 17{,}32 \text{ cm}^2$ *Se realizan las operaciones indicadas.*

El área del triángulo es de $17{,}32 \text{ cm}^2$.

Ejemplos

③ Un terreno de forma triangular mide en dos de sus lados 16 m y 25 m, y el ángulo entre ellos es de 35°. Si se va a repartir en áreas iguales entre tres personas, ¿cuánto debe medir el área de la parte del terreno que le corresponde a cada persona?

Se utiliza la fórmula $A = \frac{bc \text{ sen } A}{2}$, ya que se conocen dos lados del triángulo y el ángulo entre ellos.

$$A = \frac{(16)(25) \text{ sen } 35°}{2} = \frac{229{,}43}{2} \approx 114{,}71$$

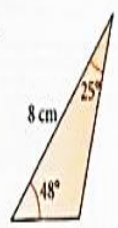
Como el área del terreno es $114{,}71 \text{ m}^2$, entonces, se divide entre 3 y se obtiene 38,236. Luego, a cada persona le corresponden aproximadamente $38{,}236 \text{ m}^2$ del terreno.

Actividades

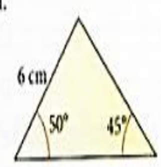
Ejercita: 1-2 Razona: 3-4-5

1 Halla el área de cada triángulo.

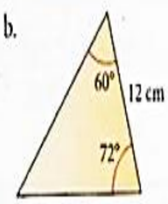
a.



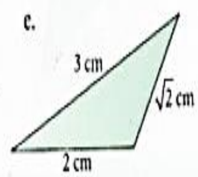
d.



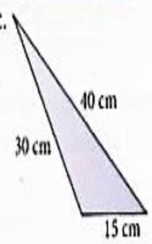
b.



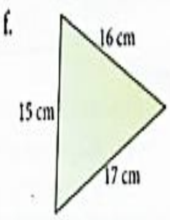
e.



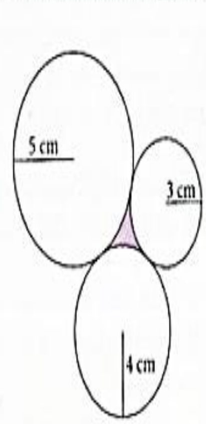
c.



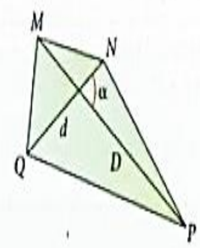
f.



2 Tres círculos de radio 3 cm, 4 cm y 5 cm son tangentes entre sí. Halla el área de la región sombreada.



3 Demuestra que el área de un cuadrilátero cualquiera es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

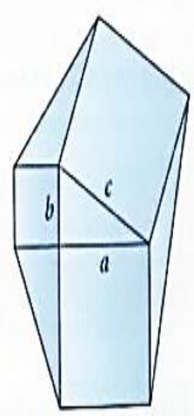


$$\text{Área} = \frac{1}{2} d \times D \times \text{sen } \alpha$$

4 Demuestra que en todo triángulo *XYZ*

$$A_\Delta^2 = \frac{1}{4} x^2 y^2 \text{ sen}^2 z$$

5 La siguiente figura ilustra el teorema de Pitágoras.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demuestra que el área de toda la figura es $2(ab + c^2)$.

TRIGONOMETRÍA ANALÍTICA
(IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS)

Identidades trigonométricas

Una **identidad** es una igualdad entre dos expresiones. Así, las expresiones $12 = 7 + 5$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ y $\frac{z^2 - 3z}{z - 3} = z$ son identidades. La primera identidad se establece entre números, la segunda y la tercera identidad se establecen entre expresiones algebraicas. La segunda se cumple para todo valor de x y de y. En cambio, la tercera se cumple para todo valor de z diferente de 3.

> Una **identidad trigonométrica** es una igualdad que contiene funciones trigonométricas y que se cumple para todo valor de la variable donde está definida la función.

Por ejemplo, $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ es una identidad trigonométrica que se cumple para todo valor de x diferente a $n\frac{\pi}{2}$, donde n es un número impar.

Relaciones recíprocas

En la unidad 2 se establecieron las **relaciones recíprocas** correspondientes a las funciones seno, coseno y tangente; en la presente unidad se tratan las relaciones recíprocas de cada una de estas funciones como identidades trigonométricas. Las identidades recíprocas son:

> $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ y $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, donde $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$
>
> $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ y $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, donde $\cos\alpha \neq 0$
>
> $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ y $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$, donde $\tan\alpha \neq 0$

Se puede verificar cualquiera de las identidades relacionadas asignando un valor para α en el cual esté definida la función. Por ejemplo, para el ángulo $\frac{\pi}{4}$ es posible verificar que se cumple la identidad $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$. Así, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ se realiza lo siguiente:

$$\frac{1}{\csc\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{2}}$$

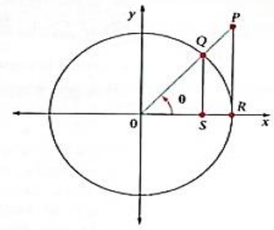
Se remplaza $\frac{\pi}{4}$ en la identidad recíproca y se evalúa cosecante en el valor dado.

$$\frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se realiza la división y se racionaliza.

De ahí se puede observar que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ se cumple para $\frac{\pi}{4}$.

Relaciones que son razón de dos funciones



Las funciones tangente y cotangente se pueden expresar en términos de seno y coseno. Esto se deduce a partir del análisis de las líneas trigonométricas en la circunferencia unitaria. Así, en la gráfica los triángulos OQS y OPR son semejantes. De ahí, que se pueda establecer la proporcionalidad entre sus lados de tal forma que $\frac{QS}{OS} = \frac{PR}{OR}$. Como $OR = 1$ porque corresponde al radio de la circunferencia, se tiene que $PR = \frac{QS}{OS}$.

Ahora, según las líneas trigonométricas estudiadas en la unidad 2, PR, QS y OS corresponden a las funciones tangente, seno y coseno de un ángulo θ en posición normal. Luego, se tiene que $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Utilizando un método similar se puede deducir que $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

> Las **funciones tangente** y **cotangente** se pueden establecer como una razón entre las **funciones seno y coseno**. Por tanto, se tienen las identidades:
>
> $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$, donde $\cos\theta \neq 0$ y $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, donde $\operatorname{sen}\theta \neq 0$

Con las identidades descritas hasta el momento, se pueden simplificar expresiones que contengan funciones trigonométricas. También es posible encontrar el valor de determinadas funciones a partir de otras dadas, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

1. **Hallar el valor de la función $\csc\theta$ si se conoce que $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.**

Como $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, ya que es la identidad recíproca que corresponde a cosecante, se remplaza $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ en dicha expresión, de donde se tiene que $\csc\theta = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

Luego, se simplifica, con lo cual se encuentra que $\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. **Determinar el valor de $\sec\theta$ si se conoce que $\tan\theta = 1$.**

Como $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\tan\theta = 1$ se tiene que $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 1$. De ahí se deduce que el valor de $\operatorname{sen}\theta$ debe ser el mismo que el valor de $\cos\theta$. Esto sucede cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$, donde $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Puesto que $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ se concluye que $\sec\theta = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Actividades

Interpreta: 1-2 | Ejercita: 3 | Razona: 4-5-6-7

1 Según el texto explicativo de las páginas 140 a 142, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué es una identidad trigonométrica?
b. ¿Cuáles son las identidades recíprocas?
c. ¿Cuáles identidades trigonométricas son razón de dos funciones?

2 Determina el valor de la función del ángulo α, a partir del valor de la función dada.

a. $\cot\alpha$ si $\tan\alpha = -\sqrt{8}$
b. $\sec\alpha$ si $\cos\alpha = -\frac{5}{7}$
c. $\cos\alpha$ si $\sec\alpha = \frac{\sqrt{13}}{3}$
d. $\operatorname{sen}\alpha$ si $\csc\alpha = \frac{12}{5}$
e. $\csc\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$
f. $\tan\alpha$ si $\cot\alpha = \frac{5}{4}$

3 A partir de los valores de las funciones dadas, halla el valor exacto de las otras funciones trigonométricas.

a. $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
b. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}$ y $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{17}}{17}$
c. $\operatorname{sen}\tau = -\frac{3}{5}$ y $\cos\tau = \frac{4}{5}$
d. $\tan\phi = 1$ y $\operatorname{sen}\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$
e. $\cos\upsilon = \frac{5}{\sqrt{34}}$ y $\csc\upsilon = -\frac{\sqrt{34}}{3}$
f. $\sec\beta = -\frac{7}{4}$ y $\operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{33}}{7}$
g. $\cot\alpha = -\frac{\sqrt{55}}{11}$ y $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}$

4 Escribe cada una de las siguientes expresiones en términos de seno y coseno. Luego, simplifica.

a. $\cos\theta\tan\theta$
b. $\sec\alpha\cot\alpha$
c. $\cos\theta\csc\theta$
d. $\sec\alpha\cos\alpha$
e. $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}$
f. $\sec\alpha + \tan\alpha\csc\alpha$
g. $\frac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} + \operatorname{sen}\theta$
h. $\frac{\operatorname{sen}\theta\sec\theta}{\tan\theta}$

5 Determina si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Si $\cot\theta = 2$, entonces, $\tan\theta = \frac{1}{4}$
b. Si $\sec\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, entonces, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
c. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces, $\csc\theta = \sqrt{2}$
d. Si $\cos\theta = \frac{4}{5}$, entonces, $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{4}$
e. Si $\csc\theta = 1$, entonces, $\operatorname{sen}\theta = 1$

6 Establece el valor exacto de las seis funciones trigonométricas, a partir de las condiciones dadas.

a. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13}$ y $\cos\alpha > 0$
b. $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\alpha < 0$
c. $\csc\alpha = 2$ y $\cot\alpha < 0$

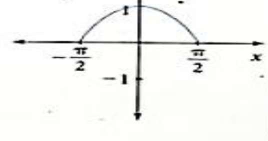
7 Resuelve las operaciones indicadas. Luego, simplifica el resultado.

a. $\sec\beta(\cos\beta + \operatorname{sen}\beta)$
b. $\operatorname{sen}\upsilon[(\cot\upsilon)(\csc\upsilon)]$
c. $\left(\frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}\right) \div \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)$
d. $\left(\frac{9\sec y}{4\operatorname{sen} y}\right)\left(\frac{8\operatorname{sen} y}{15\sec y}\right) \div \left(\frac{5\tan^2 y}{6\operatorname{sen}^2 y}\right)$

Soluciona problemas

8 En la gráfica se muestra la función $y = \cos x$ para $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Explica cómo trazas la gráfica de $y = \sec x$ para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, a partir de la gráfica dada y de la identidad recíproca $\sec x = \frac{1}{\cos x}$.



IDENTIDADES PITAGÓRICAS

Identidades pitagóricas

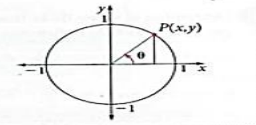
Las **identidades pitagóricas** son:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1 \qquad \csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$$

Las identidades pitagóricas se deducen a partir de las líneas trigonométricas que se definen en la circunferencia unitaria.

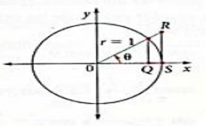
Demostración de $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Sea $P(x, y)$ un punto sobre la circunferencia unitaria. Por definición se cumple que $\cos\theta = x$ y $\operatorname{sen}\theta = y$.
Como $x^2 + y^2 = 1$ se cumple para todo punto de la circunferencia unitaria, se deduce que: $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
La identidad se cumple para todo valor de θ, ya que el dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de los números reales.



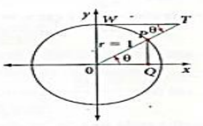
Demostración de $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

Sean $\sec\theta = OR$ y $\tan\theta = RS$ según la definición de líneas trigonométricas. Luego, se tiene que el triángulo OSR es rectángulo, y por tanto $OR^2 = SR^2 + OS^2$, es decir, $OR^2 = SR^2 + 1$, porque $OS = 1$ corresponde al radio de la circunferencia. Al remplazar se tiene que $\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$.
La identidad se cumple para todo valor de $\theta \neq \frac{n\pi}{2}$, donde n es un número entero impar, ya que en estos valores las funciones secante y tangente no están definidas.



Demostración de $\csc^2\theta = \cot^2\theta + 1$

Sean $\csc\theta = OT$ y $\cot\theta = TW$ las líneas trigonométricas correspondientes a cosecante y cotangente del ángulo θ. Luego, el triángulo OTW es rectángulo y en consecuencia $OT^2 = TW^2 + WO^2$, como $OW = 1$, se tiene $OT^2 = TW^2 + 1$, de donde se deduce que $\csc^2\theta = \cot^2 + 1$.
La identidad se cumple para todo valor de $\theta \neq np$, donde n es un número entero, puesto que en estos valores las funciones cotangente y cosecante no están definidas.



Las identidades pitagóricas permiten expresar una función en términos de otra. Por ejemplo, $\cos\theta = x$ se puede expresar en términos de seno despejando coseno de la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ de tal forma que $\cos^2\theta = 1 - \operatorname{sen}^2\theta$ y, en consecuencia,

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}.$$

De la misma forma se puede expresar $\operatorname{sen}\theta$ en términos de coseno así:

$$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

Expresión de una función en términos de las otras cinco

Cada función se puede expresar en términos de las otras cinco funciones utilizando las identidades recíprocas, las identidades que expresan una función como razón de otras dos, y las identidades pitagóricas.

Por ejemplo, $\operatorname{sen}\alpha$ se puede expresar en términos de las demás funciones trigonométricas de la siguiente manera:

En términos de $\cos\alpha$: se utiliza la identidad pitagórica $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ de donde se despeja $\operatorname{sen}\alpha$, de tal forma que $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$.

En términos de $\sec\alpha$: se remplaza $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ en $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, de tal forma que $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sec\alpha}\right)^2}$, es decir, $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2\alpha}}$.

En términos de $\csc\alpha$: se expresa mediante la identidad recíproca $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$.

En términos de $\cot\alpha$: se despeja $\csc\alpha$ en la identidad $\csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1$ de tal manera que $\csc\alpha = \pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}$. Luego, se remplaza $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y se despeja $\operatorname{sen}\alpha$, así: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \cot^2\alpha}}$.

En términos de $\tan\alpha$: se utiliza la identidad $\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$ donde se sustituye $\sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Luego, se despeja $\cos^2\alpha$, así: $\cos^2\alpha = \frac{1}{\tan^2\alpha + 1}$.
Finalmente, se remplaza $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ y se despeja $\operatorname{sen}\alpha$ de donde resulta $\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2\alpha + 1}}$.

En la siguiente tabla se resume cómo expresar las seis funciones trigonométricas en términos de seno, coseno y tangente.

Función	$\operatorname{sen}\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$\operatorname{sen}\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
$\cos\theta$	$\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$	$\cos\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$
$\tan\theta$	$\pm\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$
$\csc\theta$	$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$
$\sec\theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$
$\cot\theta$	$\pm\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$

Actividades

Ejercita: 1-6 Razona: 2-3-4-5

1 Calcula el valor de todas las funciones trigonométricas para un ángulo β ubicado en el cuarto cuadrante si se sabe que:

a. $\cos\beta = \frac{2}{3}$
b. $\operatorname{sen}\beta = -\frac{5}{8}$
c. $\tan\beta = -\frac{6}{7}$
d. $\csc\beta = -\frac{7}{4}$
e. $\sec\beta = \frac{3}{2}$
f. $\cot\beta = -\frac{9}{5}$

2 Escribe cada expresión en términos de seno.

a. $\cot x \cdot \sec x$
b. $\cot^2\theta \cdot \csc\theta$
c. $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\tan^2\theta}$
d. $\frac{\csc^2\gamma - 1}{\cos\gamma\cot\gamma}$
e. $2 + \tan\beta + 5\cos\beta$
f. $\frac{2}{\csc^2\theta} - 2\tan^2\theta$
g. $\frac{\tan^2\theta - \csc^2\theta}{\sec^2\theta}$
h. $3\cos\theta + 6\tan\theta$
i. $3 + \tan\alpha - 3\csc\alpha$
j. $\frac{1 - \sec^2\beta}{\sec^2\beta}$
k. $\frac{\tan^2\theta + 1}{\cos\theta}$
l. $3\tan^2\alpha - 4\sec^2\alpha$
m. $\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{3}{5}\cot^2\beta$
n. $\frac{2}{\cot^2 x} - \frac{\sec x}{\csc x}$

3 Escribe cada expresión en términos de coseno.

a. $\operatorname{sen}\alpha$
b. $\sec\alpha$
c. $\tan\theta$
d. $\sec^2\alpha$
e. $\csc^2\alpha$
f. $\cot^2\gamma\sec\gamma$
g. $\tan\theta\csc\theta$
h. $\frac{\operatorname{sen} x\cot x}{3}$
i. $\frac{1 - \csc^2\alpha}{\csc^2\alpha}$
j. $\frac{\sec^2\theta - \cot^2\theta}{\csc^2\theta}$
k. $3\csc^2 x + \frac{1}{4\sec x}$
l. $\frac{\tan^2 x}{3\sec x}$
m. $\sec\beta + \tan\beta$
n. $5\cos\alpha + 3\csc\alpha + \tan\alpha$
o. $\tan^2\theta + \frac{5\cot\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
p. $\frac{\sec^2 y - 1}{\operatorname{sen} y\tan y}$
q. $(1 + \operatorname{sen}\beta)^2 - \frac{2\operatorname{sen}\beta}{3}$
r. $\frac{\cos^3\theta}{\cot^2\theta}$
s. $\frac{\cot^2\theta + 1}{\operatorname{sen}\theta}$

4 Expresa cada función en términos de la función que se indica en cada literal.

a. $\operatorname{sen} x\cos x$ en términos de $\cot x$.
b. $\tan\beta\csc\beta$ en términos de $\sec\beta$.
c. $\frac{1}{\cot\theta}$ en términos de $\csc\theta$.
d. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$ en términos de $\tan\alpha$.
e. $(\tan\omega + \cot\omega)^2$ en términos de $\csc\omega$.
f. $\frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$ en términos de $\cot\theta$.
g. $\tan^2\alpha + 3 - 5\sec^2\alpha$ en términos de $\sec\alpha$.
h. $\sec x \cdot \cot x \cdot \tan x$ en términos de $\csc x$.
i. $\frac{\tan\beta}{\cot\beta}$ en términos de $\cot\beta$.
j. $\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cot x} + \frac{\cot x}{1 - \tan x}$ en términos de $\sec x$.
k. $\frac{\tan\gamma}{1 - \cot\gamma} + \frac{\cot\gamma}{1 - \tan\gamma}$ en términos de $\csc\gamma$.

5 Escribe un ejemplo para verificar que las siguientes igualdades no son verdaderas.

a. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
b. $\sec\theta = \sqrt{\tan^2\theta + 1}$
c. $\sqrt{\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma} = \operatorname{sen}\gamma + \cos\gamma$
d. $3\cos^2\theta + \cos\theta - 2 = 0$
e. $\cot\omega(\tan\omega) = \tan\omega$

6 Utiliza las identidades fundamentales y una calculadora para obtener el valor de todas las funciones trigonométricas.

a. $\sec x = 1{,}642$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$
b. $\csc x = 2{,}276$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$
c. $\cot x = 0{,}4955$ y $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$
d. $\csc x = 4$ y $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
e. $\tan x = -0{,}974$ y $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

IDENTIDADES DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE ÁNGULOS
(SUMA DE ÁNGULOS)

Identidades para la suma de ángulos

Las identidades trigonométricas para la suma de ángulos son:

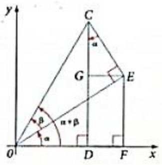
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Para deducir las fórmulas de la suma de ángulos se analizan los triángulos formados a partir de dos ángulos adyacentes α y β.

En la figura, se cumple que $\overline{CD}\perp\overline{OF}$ y $\overline{CE}\perp\overline{OE}$, de donde se deduce que $\sphericalangle EOF\cong\sphericalangle ECD$.

Además se cumple que $\overline{GD}=\overline{EF}$ y $\overline{GE}=\overline{DF}$.

Teniendo en cuenta estas premisas, a continuación se deducen las fórmulas para el seno, coseno y tangente de la suma de dos ángulos.



Seno de la suma de dos ángulos

Para deducir la fórmula correspondiente al seno de la suma de dos ángulos se realiza el siguiente procedimiento:

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{DC}{OC}=\frac{DG+GC}{OC}$ — Se utiliza la definición de seno.

$=\frac{DG}{OC}+\frac{GC}{OC}$ — Se aplica la propiedad distributiva.

$=\frac{EF}{OC}\cdot\frac{OE}{OE}+\frac{GC}{OC}\cdot\frac{CE}{CE}$ — Se sustituyen teniendo en cuenta que $DG=EF$ y se multiplica por 1 cada sumando.

$=\frac{EF}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}+\frac{GC}{CE}\cdot\frac{CE}{OC}$ — Se utiliza la propiedad conmutativa de la multiplicación.

$=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ — Se aplican las definiciones de seno y coseno.

De donde se concluye que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Coseno de la suma de dos ángulos

La deducción de la fórmula para calcular el coseno de la suma de dos ángulos se realiza así:

$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD}{OC}=\frac{OF-DF}{OC}$ — Se aplica la definición de coseno.

$=\frac{OF}{OC}-\frac{GE}{OC}$ — Se utiliza la propiedad distributiva.

$=\frac{OF}{OC}\cdot\frac{OE}{OE}-\frac{GE}{OC}\cdot\frac{CE}{CE}$ — Se multiplica por 1.

$=\frac{OF}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}-\frac{GE}{CE}\cdot\frac{CE}{OC}$ — Se aplica la propiedad conmutativa de la multiplicación.

$=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

Por lo tanto, se cumple que $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

Tangente de la suma de dos ángulos

La deducción de la fórmula para calcular la tangente de la suma de dos ángulos, se realiza a partir de las fórmulas de seno y coseno, de la siguiente manera:

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ — *Se expresa la tangente en términos de seno y coseno.*

$=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$ — *Se aplican las fórmulas seno y coseno de la suma de dos ángulos.*

$=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ — *Se divide cada factor entre $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$.*

$=\dfrac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$ — *Se utiliza la propiedad distributiva.*

$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ — *Se simplifica y se aplican identidades fundamentales.*

Ejemplos

1 **Determinar el valor numérico de sen 105° usando las identidades para la suma de ángulos.**

Se realiza el siguiente procedimiento:

$\operatorname{sen}105°=\operatorname{sen}(60°+45°)$ — *Se expresa 105° como la suma de 60° y 45°.*

$=\operatorname{sen}60°\cos45°+\operatorname{sen}45°\cos60°$ — *Se aplica la fórmula para el seno de la suma de dos ángulos.*

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}$ — *Se calcula el seno y el coseno de cada ángulo.*

$=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}$ — *Se realizan las operaciones respectivas.*

De donde se deduce que $\operatorname{sen}105°=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2 **Demostrar la identidad $\operatorname{sen}(\alpha+\pi)=-\operatorname{sen}\alpha$.**

Se utiliza la identidad de seno para la suma de ángulos. Así:

$\operatorname{sen}(\alpha+\pi)=\operatorname{sen}\alpha\cos\pi+\operatorname{sen}\pi\cos\alpha$ — *Se aplica la identidad.*

$=(-\operatorname{sen}\alpha)(1)+(0)(\cos\alpha)$ — *Se calcula sen π y cos π.*

$=-\operatorname{sen}\alpha$ — *Se simplifica.*

Con lo cual queda demostrada la identidad.

Actividades

Ejercita: 1-2 Razona: 3-4

1 **Determina el valor de cada función utilizando las identidades para suma y diferencia de ángulos.**

a. $\cos 165°$
b. $\operatorname{sen} 15°$
c. $\operatorname{sen} 75°$
d. $\cos 345°$
e. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7}{12}\pi\right)$
f. $\tan\frac{13}{12}\pi$
g. $\csc\frac{5}{12}\pi$
h. $\tan 105°$
i. $\cos 195°$
j. $\operatorname{sen} 285°$
k. $\tan(-120°)$
l. $\cos\frac{23}{12}\pi$
m. $\operatorname{sen}\frac{19}{12}\pi$
n. $\tan\frac{17}{12}\pi$

2 **Escribe cada expresión en términos de seno, coseno o tangente de un solo ángulo. Luego, obtén el valor correspondiente, si es posible.**

a. $\operatorname{sen}32°\cos58°+\cos32°\operatorname{sen}58°$
b. $\cos50°\cos275°+\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}275°$
c. $\operatorname{sen}110°\operatorname{sen}70°-\cos110°\cos70°$
d. $\cos116°\cos64°-\operatorname{sen}116°\operatorname{sen}64°$
e. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{\pi}{12}\operatorname{sen}\frac{7}{12}\pi$
f. $\cos\frac{7\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\operatorname{sen}\frac{7\pi}{8}\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$
g. $\frac{\tan20°+\tan25°}{1-\tan20°\tan25°}$
h. $\frac{\tan200°-\tan80°}{1+\tan200°\tan80°}$

3 **Usa las identidades de suma y diferencia de ángulos para demostrar cada identidad.**

a. $\cos(30°-x)+\cos(30°+x)=\sqrt{3}\cos x$
b. $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x$
c. $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan x}$
d. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$
e. $\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}x\cos y}=1+\cot x\tan y$
f. $\operatorname{sen}(x+y)=\frac{\cos x\csc y}{\cot x\cot y-1}$

4 **Encuentra los valores para $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ para cada condición.**

a. $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, α y β son ángulos ubicados en el primer cuadrante.
b. $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{12}{13}$, α está en el cuarto cuadrante y β está en el tercer cuadrante.
c. $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$, α y β son ángulos ubicados en el tercer cuadrante.
d. $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{sen}\beta=-\frac{7}{25}$, α está en el segundo cuadrante y β está en el cuarto cuadrante.

Soluciona problemas

5 **Para determinar la temperatura máxima (en grados Fahrenheit) de Chicago, se utiliza la función:**

$$T(n)=26{,}5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n-\frac{2\pi}{3}\right)+56{,}5$$

donde n representa los meses, y $n=1$ es el mes de enero.
Demuestra que $T(n)$ se puede escribir como:

$$T(n)=-13{,}25\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}n\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)\right]+56{,}5$$

6 **Demuestra que se cumplen las siguientes igualdades teniendo en cuenta que $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ y $\sphericalangle C$ son los tres ángulos interiores de un triángulo:**

a. $\cos(A-C)-\cos B=2\cos A\cos C$
b. $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

7 **La fuerza para mantener la caja en la rampa está dada por:**

$$F=\frac{w(\operatorname{sen}\alpha+\mu\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\operatorname{sen}\alpha}$$

donde w es el peso, θ el ángulo de inclinación y $\mu=\tan\theta$. Demuestra que $F=w\tan(\alpha+\theta)$.

Ecuaciones trigonométricas

Las **ecuaciones trigonométricas** son aquellas que contienen funciones trigonométricas de un ángulo α, las cuales son verdaderas solo para ciertos valores de α.

Por ejemplo, las siguientes expresiones son ecuaciones trigonométricas:

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 2\cos x + 1 = 1 \qquad 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 3 = 0$$

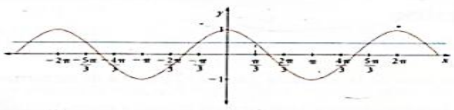
Cada ecuación se cumple solamente para algunos valores de la variable x.

Las ecuaciones trigonométricas pueden ser **lineales** o **cuadráticas** dependiendo el grado que tenga la función. Por ejemplo, $2\cos x + 2 = 1$, es una ecuación lineal porque coseno tiene grado 1. En cambio, $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x - 3 = 0$ es una ecuación cuadrática ya que el mayor grado de la función seno en la ecuación es 2.

Resolver una ecuación trigonométrica es determinar todos los posibles valores de la variable para los cuales se cumple la igualdad. Las ecuaciones trigonométricas más simples son de la forma $f(x) = k$, donde k es constante, cuya solución se explica a continuación.

Solución de ecuaciones trigonométricas de la forma $f(x) = k$

Para resolver una ecuación trigonométrica de la forma $f(x) = k$, donde $f(x)$ es una función trigonométrica y k es una constante, se utiliza el concepto de función inversa para determinar los posibles valores de x. Por ejemplo, para resolver $\cos x = \frac{1}{2}$, se debe tener en cuenta que, $\cos x = \frac{1}{2}$, si y sólo si $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x$. En este caso, como coseno es positivo en los cuadrantes I y IV, los posibles valores de x son $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{5\pi}{3}$ para $0 < x < 2\pi$. Sin embargo, la ecuación puede tener infinitas soluciones, lo cual se puede observar en la siguiente gráfica:



Nótese que la recta $y = \frac{1}{2}$ interseca a la gráfica de la función $\cos x$ en infinitos puntos, y por esto la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ tiene infinitas soluciones.

De manera general, una ecuación trigonométrica puede tener infinitas soluciones o ninguna solución.

Ecuaciones trigonométricas lineales

Las **ecuaciones trigonométricas lineales** se resuelven despejando la función trigonométrica hasta obtener una expresión de la forma $f(x) = k$.

Por ejemplo, para resolver $\sqrt{2}\cos x + 1 = 2$, se despeja sen x, así:

$\sqrt{2}\cos x = 1$ — *Se resta 1.*

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ — *Se multiplica por $\frac{1}{\sqrt{2}}$.*

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — *Se racionaliza.*

De este modo, las soluciones de las ecuaciones para el intervalo $[0, 2\pi]$ son $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{7\pi}{4}$.

Ecuaciones trigonométricas cuadráticas

Las **ecuaciones trigonométricas cuadráticas** se pueden resolver utilizando la factorización, siempre que sea posible. También se pueden resolver expresando la función de la forma $y^2 = k$, donde y es una función trigonométrica y k es la constante.

Por ejemplo, para resolver $\text{sen}^2 x - 1 = 0$, se realizan los siguientes pasos:

$(\text{sen}\, x - 1)(\text{sen}\, x + 1) = 0$ — *Se factoriza teniendo en cuenta que hay una diferencia de cuadrados.*

$\text{sen}\, x - 1 = 0$

$\text{sen}\, x + 1 = 0$ — *Se iguala a cero cada factor.*

Finalmente, se resuelve cada factor como una ecuación trigonométrica lineal.

$\text{sen}\, x - 1 = 0$, si y sólo si, $\text{sen}^{-1}\, 1 = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$\text{sen}\, x + 1 = 0$, si y sólo si, $\text{sen}^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

De donde se concluye que las soluciones de $\text{sen}^2 x - 1 = 0$ son $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Ejemplos

1. **Resolver la ecuación trigonométrica $2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2} = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

   Se despeja seno de la ecuación $2\,\text{sen}\, x - \sqrt{2} = 0$ de tal forma que $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

   Como la función seno es positiva en el primer y segundo cuadrante se tiene que $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ o $\text{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Por tanto, las soluciones de la ecuación son $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\pi}{4}$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Actividades

Recupera información: 1 | Ejercita: 2-3 | Razona: 4-5-6

1 Responde:

a. ¿Cómo se resuelven ecuaciones trigonométricas lineales?

b. ¿Cómo se resuelven ecuaciones trigonométricas cuadráticas?

2 Determina cuál de los siguientes enunciados es verdadero y cuál es falso. Justifica tu respuesta.

a. Toda identidad es ecuación.

b. Toda ecuación es identidad.

3 Encuentra la solución para cada ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$.

a. $|\cos x| = 0{,}5$

b. $3\tan x + 2 = \tan x$

c. $2\cot x - 3 = 5$

d. $\sqrt{3}\cot x = -1$

e. $6\,\text{sen}\, x = 0$

f. $2\,\text{sen}\, x = -\sqrt{2}$

g. $\sec x = \sqrt{2}$

h. $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

i. $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

j. $3\sec x = 6$

4 Determina cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas. Para las afirmaciones falsas, escribe un contraejemplo.

a. La ecuación $\tan^2 x = 3$ tiene dos soluciones en el intervalo $0 \le x \le \pi$.

b. La ecuación $4\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0$ no tiene solución en el intervalo $\pi < \theta \le 2\pi$.

c. La ecuación $\text{sen}^2 x - 6 = 0$ no tiene soluciones reales.

d. La ecuación $10\cos x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y tiene otra solución en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

e. La ecuación $\tan\theta - 11 = 1$ tiene una solución en el intervalo $\pi < \theta \le \frac{3\pi}{2}$.

f. 52,4° es una solución de la ecuación $-5\tan\theta = 6{,}5$.

g. La ecuación $3\csc x - 1 = 0$ no tiene solución.

h. La ecuación $4\sec x = 2$ tiene dos soluciones.

i. El ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ es solución de la ecuación $\cos\theta\tan\theta - \text{sen}^2\theta = \theta$.

5 Usa la calculadora para solucionar cada ecuación en el intervalo $[0°, 360°]$.

a. $2\cos\theta + \frac{1}{3} = \cos\theta$

b. $3\tan\theta - \frac{4}{3} = 2\tan\theta$

c. $\text{sen}\,\theta - \frac{5}{12} = 0$

d. $\cot\theta - 5 = 3\cot\theta$

e. $7\cos\theta - \frac{2}{3} + \cos\theta = -3$

f. $4\sec\theta - 2 = 6\sec\theta$

RECUERDA QUE...

Para resolver una ecuación cuadrática de la forma:

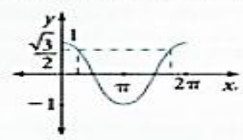
$$ax^2 + bx + c = 0$$

se utiliza la fórmula:

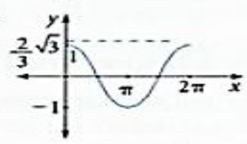
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

6 Relaciona cada ecuación con la gráfica que representa su solución en $[0, 2\pi]$.

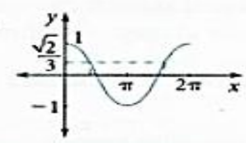
a.



b.



c.



1. $\sqrt{3}\cos x = 2$

2. $3\cos x = \sqrt{2}$

3. $2\cos x = \sqrt{3}$

Soluciona problemas

7 A causa de las mareas del océano la profundidad P de un río varía como una función de sen de x, dependiendo de la hora del día. Cierto día, la función tuvo una forma:

$$P = 3\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{6}(x - 4)\right] + 8$$

donde $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$, corresponde a las 12 p.m., 1 a.m., 2 a.m. y así sucesivamente. Responde:

a. ¿Cuál es la máxima profundidad del río ese día? ¿A qué hora tiene lugar ese fenómeno?

b. ¿A qué hora el río tiene una profundidad de 10 m?

GEOMETRÍA ANALÍTICA

(DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS)

La línea recta

La **geometría analítica** es la parte de la matemática que conecta el álgebra con la geometría. Con ella es posible resolver problemas geométricos en forma algebraica. Además, la geometría analítica se trabaja en un sistema de coordenadas.

Para el estudio de la línea recta, primero se definen lugar geométrico, distancia entre dos puntos y pendiente de la recta como se presenta a continuación.

Lugar geométrico

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que pertenecen al plano cartesiano y que cumplen determinada característica geométrica común.

En relación con la característica común de los puntos que pertenecen al lugar geométrico del plano es posible realizar su representación analítica por medio de una ecuación, la cual se denomina *ecuación de un lugar geométrico*. También es posible realizar la representación geométrica por medio de una gráfica en el plano cartesiano.

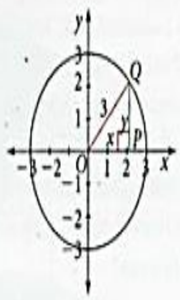
Para determinar la ecuación de un lugar geométrico, se expresan algebraicamente las propiedades de los puntos $P(x, y)$ de ese lugar, mediante igualdades que relacionan las variables x y y.

Ejemplos

Determinar la ecuación del lugar geométrico en cada caso:

a. El conjunto de puntos del plano cuya distancia al origen es 3 unidades.

El conjunto de puntos del plano cuya distancia al origen es 3 unidades es un lugar geométrico denominado circunferencia con centro en el origen (0, 0) y radio 3, como se muestra en la figura. Para establecer la relación entre las variables x y y de los puntos $P(x, y)$ que pertenecen al lugar geométrico, se procede de la siguiente manera:



Se construye el triángulo rectángulo OQP, luego se tiene:

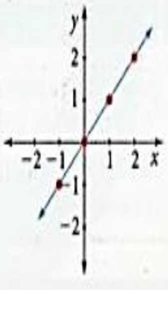
$x^2 + y^2 = 3^2$ *Se aplica el teorema de Pitágoras.*

$x^2 + y^2 = 9$ *Se resuelve la potencia.*

Por lo tanto, el lugar geométrico tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

b. El conjunto de puntos cuya coordenada en x es igual a su coordenada en y.

El conjunto de puntos cuya coordenada en x es igual a su coordenada en y es una línea recta como se muestra en la figura.



Para determinar la ecuación del lugar geométrico, se expresa en forma algebraica la relación entre las variables, como x es igual a y se escribe $x = y$.

Por lo tanto, la ecuación del lugar geométrico es $x = y$.

En la gráfica se muestran algunos puntos que pertenecen al lugar geométrico, estos son: $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

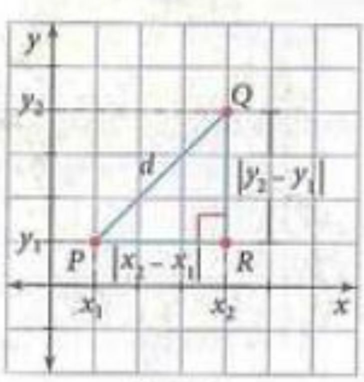


Figura 1

Distancia entre dos puntos

La **distancia entre dos puntos** $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del plano, se simboliza como $d(P, Q)$ y está determinada por la fórmula $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

La fórmula de distancia entre dos puntos se deduce a partir del teorema de Pitágoras. Así:

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos del plano y d la longitud del segmento de recta que une a P con Q (figura 1).

Si R tiene coordenadas (x_2, y_1), se traza el triángulo rectángulo PQR con ángulo recto en R, la longitud de los catetos es:

$PR = |x_2 - x_1|$ *Se aplica la distancia entre los puntos x_1 y x_2*

$QR = |y_2 - y_1|$ *Se aplica la distancia entre los puntos y_1 y y_2*

La longitud de la hipotenusa (d) se determina de la siguiente manera:

$(PQ)^2 = (PR)^2 + (QR)^2$ *Se aplica el teorema de Pitágoras.*

$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ *Se remplazan las longitudes.*

$d = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$ *Se despeja d.*

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ *Como $(x_2 - x_1)^2 = |x_2 - x_1|^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = |y_2 - y_1|^2$*

Por lo tanto, la distancia entre P y Q es: $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

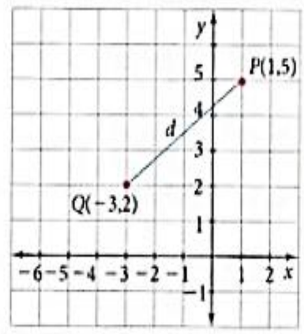
Por ejemplo, para hallar la distancia entre los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, 2)$ se aplica la fórmula.

$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d(P, Q) = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - 5)^2}$ *Se aplica la fórmula de distancia.*

$d(P,Q) = \sqrt{25}$ *Se realizan las operaciones.*

$d(P,Q) = 5$ *Se extrae la raíz.*



Por lo tanto, la distancia entre los puntos $P(1, 5)$ y $Q(-3, 2)$ es $d(P, Q) = 5$.

Punto medio de un segmento

Las coordenadas del **punto medio del segmento** que une dos puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

GEOMETRÍA ANALÍTICA

(PENDIENTE DE UNA RECTA Y ACTIVIDADES)

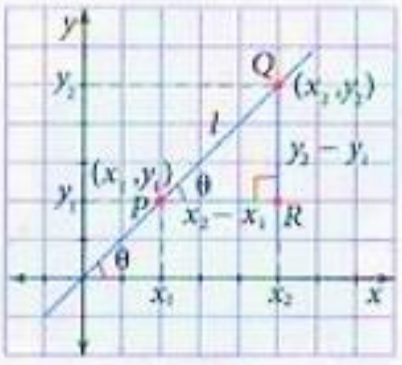


Figura 2

Pendiente de una recta

> La **pendiente** m de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se define como
> $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x_1 \neq x_2$.

En la figura 2 se muestra la recta l que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$. En el triángulo rectángulo PRQ, el ángulo θ tiene igual medida que el ángulo que forma la recta l con el eje x. Además se tiene que:

$\tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *Se determina la tangente para el ángulo θ en el △PRQ.*

Por lo tanto, la pendiente de la recta es igual a la tangente del ángulo que la recta forma con el eje positivo x. El ángulo θ se conoce como el *ángulo de inclinación de la recta*. De este modo, es posible definir la pendiente de una recta a partir del ángulo de inclinación. Así, $m = \tan\theta$.

Ejemplos

① **Hallar la pendiente de una recta que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-4, -3)$ y el ángulo de inclinación de la recta.**

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *Definición de pendiente de una recta.*

$m = \frac{-3-2}{-4-3} = \frac{5}{7}$ *Se remplazan las coordenadas de los puntos y se resuelven las operaciones.*

Por lo tanto, la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(-4, -3)$ es $m = \frac{5}{7}$.

Para hallar el ángulo de inclinación de la recta se plantea la ecuación:

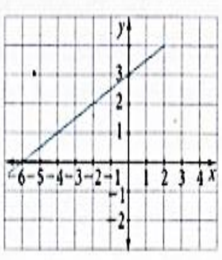
$\tan\theta = m$

$\tan\theta = \frac{5}{7}$ *Se remplaza el valor de m.*

$\theta = \arctan\left(\frac{5}{7}\right) = 35°32'15''$ *Se despeja el ángulo θ.*

Así, el ángulo de inclinación de la recta cuya pendiente es $\frac{5}{7}$, es $\theta = 35°32'15''$.

② **Determinar la pendiente de la recta a partir de su representación gráfica.**



La recta pasa por $(-4, 1)$ y $(0, 3)$, entonces, se halla la pendiente, así:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ *Definición de la pendiente de una recta.*

$m = \frac{3-1}{0-(-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, la pendiente de la recta es $m = \frac{1}{2}$.

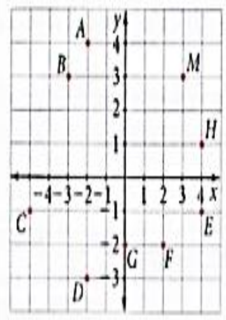
Actividades

1 Halla la ecuación de lugar geométrico de todos los puntos (x, y) del plano que cumplen con las condiciones dadas.

a. Se encuentran a 4 unidades del punto $(0, 0)$.
b. La suma de sus coordenadas es igual a 6.

2 Representa gráficamente los lugares geométricos del punto anterior.

3 Encuentra la distancia entre cada punto y el punto M.



a. $d(M, A)$ d. $d(M, D)$ g. $d(M, G)$
b. $d(M, B)$ e. $d(M, E)$ h. $d(M, H)$
c. $d(M, C)$ f. $d(M, F)$ i. $d(M, M)$

4 Determina las coordenadas del punto medio del segmento que une cada par de puntos.

a. $R(1, 3), S(-3, 4)$
b. $M(-2, 5), N(-1, 7)$
c. $P(-5, -2), Q(3, 4)$
d. $T(-5, 4), U(-1, -4)$
e. $V(5, -3), W(0, 0)$
f. $A(-3, 7), B(2, -8)$
g. $X\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), Y\left(\frac{3}{2}, -2\right)$
h. $E\left(4, \frac{5}{2}\right), F\left(-\frac{3}{4}, -3\right)$

5 Calcula la distancia entre cada par de puntos y grafícalos.

a. $P(-2, 4), Q(3, -2)$
b. $H(7, 11), G(-2, 4)$
c. $M\left(-1, \frac{1}{3}\right), N\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
d. $T\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), U\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

RECUERDA QUE...

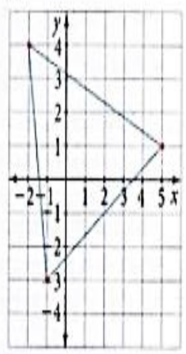
En la ecuación $y = mx + b$
m: pendiente
b: y-intercepto

6 Determina la pendiente que pasa por cada par de puntos y luego, traza la recta en el plano.

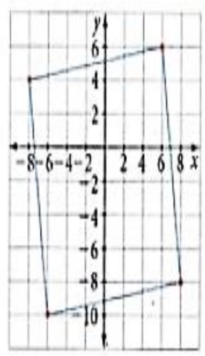
a. $A(-2, 5), B(3, 5)$ d. $C\left(-4, -\frac{2}{3}\right), D(-4, 7)$
b. $I(12, -3), J(-4, 3)$ e. $G\left(3, \frac{1}{2}\right), H\left(\frac{2}{5}, 4\right)$
c. $K(0, 3), L(-7, 0)$ f. $M\left(\frac{2}{3}, 5\right), P\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

7 Determina las coordenadas del punto medio de cada lado del polígono. Luego, construye un polígono con los puntos medios hallados y calcula su perímetro.

a.



b.

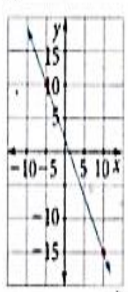


8 Realiza la representación gráfica de cada recta según las condiciones dadas.

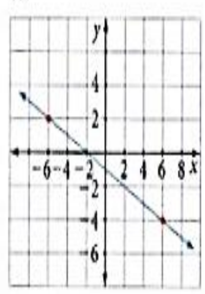
a. Pasa por los puntos $P(3, 4)$ y $A(-2, 4)$.
b. Pasa por los puntos $A\left(-\frac{1}{2}, 7\right)$ y $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$
c. El ángulo de inclinación es $\theta = 45°$ y pasa por $P(3, 3)$.
d. El ángulo de inclinación es $\theta = 180°$ y pasa por $P(-2, 8)$.
e. El ángulo de inclinación es $\theta = 30°$ y pasa por $P(1, \sqrt{3})$.

9 Determina la pendiente y el ángulo de inclinación de cada recta.

a.



b.

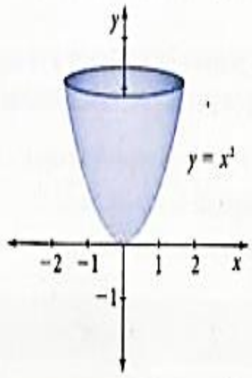


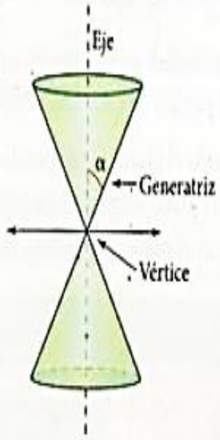
Cónicas

Superficie cónica de revolución

Una **superficie de revolución** es aquella generada por una curva plana, que se hace girar alrededor de una recta fija, ubicada en el mismo plano de la curva.

En la figura se muestra la curva $y = x^2$, que se hace girar alrededor del eje y.





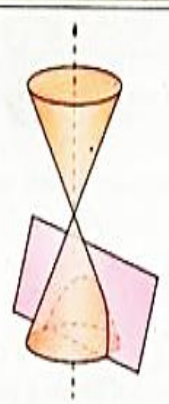
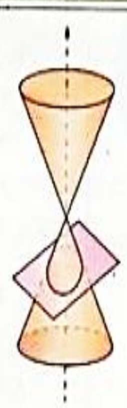
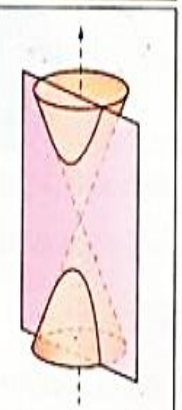
Cuando se hace girar una recta alrededor de una recta fija, la superficie generada es un cono circular recto denominado *superficie cónica de revolución*.

- La recta que gira se denomina *generatriz de la superficie*.
- La recta fija se denomina *eje*.
- El punto de corte de las dos rectas se denomina *vértice*.

Sección cónica

Una **sección cónica** es una curva que resulta de la intersección de un plano con una superficie cónica de revolución.

Las secciones que se pueden obtener dependiendo del ángulo de inclinación del plano que corta la superficie cónica de revolución son: la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

Circunferencia	Parábola	Elipse	Hipérbola
 El plano es perpendicular al eje de la superficie cónica.	 El plano es paralelo a la generatriz de la superficie cónica.	 El plano corta transversalmente a la superficie cónica.	 El plano que corta a la superficie cónica es paralelo al eje de la superficie cónica.

Y esto que aprendí, ¿PARA QUÉ ME SIRVE?

Las secciones cónicas se utilizan en la construcción de edificios, monumentos, estadios, …

Ecuación general de segundo grado

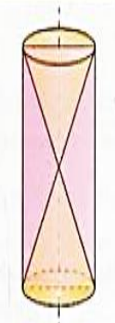
Una sección cónica se puede determinar a partir de la ecuación de segundo grado $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son números reales y A, B y C diferentes de cero.

El estudio de cada sección cónica se hará desde el punto de vista geométrico y analítico donde a cada curva le corresponde una ecuación de segundo grado.

Cónicas degeneradas

Las **cónicas degeneradas** se forman cuando el plano que interseca a la superficie cónica pasa por el vértice de esta. Las secciones cónicas degeneradas pueden ser:

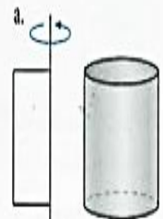
- Un punto, cuando el plano es perpendicular al eje de la superficie cónica.
- Línea, cuando el plano es paralelo a la generatriz de la superficie.
- Secantes, cuando el plano es paralelo al eje de la superficie cónica.

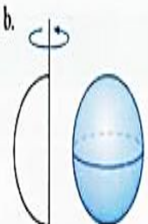
Un punto	Una recta	Dos rectas secantes
		

Actividades

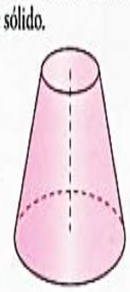
Razona: 1-2

1 Escribe el nombre de las superficies de revolución que se forman en cada caso.

a. 

b. 

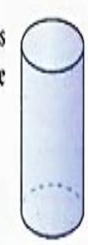
2 Realiza un dibujo donde se ilustre la formación del siguiente sólido.



Soluciona problemas

3 En la situación se utiliza una linterna para alumbrar un área en el suelo. Determina la cónica que se forma en este caso.

4 Escribe el nombre de las cónicas que se pueden formar a partir de cortes de un plano a un cilindro.



GEOMETRÍA ANALÍTICA
(CIRCUNFERENCIA)

La circunferencia

Una **circunferencia** es el conjunto de puntos que está a una distancia constante de un punto fijo denominado **centro**. La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama **radio**.

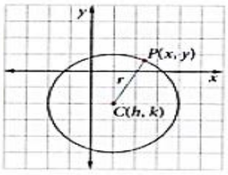
Ecuación canónica de la circunferencia

En la figura se muestra una circunferencia con centro en el punto $C(h, k)$ y radio r. Como el punto $P(x, y)$ pertenece a la circunferencia se cumple que:

$d(P, C) = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ Se determina la distancia entre P y C.

$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$ Se aplica la definición de circunferencia $d(P, C) = r$.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ Se eleva al cuadrado a ambos lados.



Por lo tanto, la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ es la ecuación de una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio r.

La **ecuación canónica de la circunferencia** con radio r y centro en el punto $C(h, k)$ es
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
En particular, si $C(h, k) = (0, 0)$, se tiene que la ecuación canónica de la circunferencia es:
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplos

1 **Encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2, -1)$ y radio 3.**

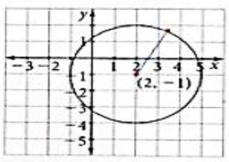
Como el centro es el punto $(2, -1)$, entonces, $h = 2$ y $k = -1$, además $r = 3$.

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ Se parte de la ecuación de la circunferencia.

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$ Se remplazan los valores.

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ Se realizan las operaciones.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en $C(2, -1)$ y radio 3 es: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ y su representación gráfica es:



Ejemplos

2 **Determinar si cada punto P pertenece a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 36$.**

a. $P(-5, \sqrt{11})$

Se remplazan las coordenadas del punto P como sigue:

$x^2 + y^2 = (-5)^2 + (\sqrt{11})^2$ Se remplazan los valores.

$= 25 + 11$ Se resuelven las potencias y se suman.

$= 36$

Las coordenadas del punto $P(-5, \sqrt{11})$ cumplen con la ecuación de la circunferencia, por lo tanto, el punto pertenece a la circunferencia.

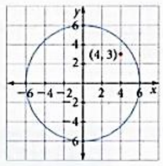
b. $P(4, 3)$

$x^2 + y^2 = (4)^2 + (3)^2$ Se remplazan los valores.

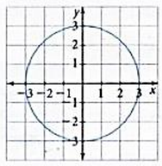
$= 16 + 9$ Se resuelven las potencias y se suman.

$= 25$

Como $25 \neq 36$, entonces, el punto $P(4, 3)$ no pertenece a la circunferencia.



3 **Encontrar la ecuación de la circunferencia a partir de su gráfica.**



La circunferencia tiene centro en $C(0, 0)$ y radio 3. Por lo tanto, su ecuación es:

$x^2 + y^2 = r^2$ Se toma la ecuación de la circunferencia con centro en (0, 0).

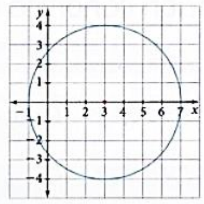
$x^2 + y^2 = 9$ Se remplaza el valor.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 = 9$.

4 **Encontrar el centro y el radio de la circunferencia que tiene como ecuación $(x-3)^2 + y^2 = 16$.**

El centro de la ecuación es $(3, 0)$, donde $h = 3$ y $k = 0$.

De la ecuación se tiene que $r^2 = 16$, así el radio es $r = 4$.



5 **Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es $\overline{PQ}$, donde $P(-3, 5)$ y $Q(1, -3)$.**

El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro. Así,

$M\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{5+(-3)}{2}\right) = (-1, 1)$ Se aplica la fórmula del punto medio entre P y Q.

Como P pertenece a la circunferencia y el centro es el punto $(-1, 1)$, entonces:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ Se remplazan las coordenadas del centro $C(-1, 1)$.

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = r^2$

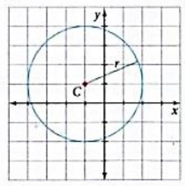
$(1+1)^2 + (-3-1)^2 = r^2$ Se remplazan las coordenadas del punto $P(1, -3)$.

$2^2 + (-4)^2 = r^2$

$20 = r^2$ Se realizan las operaciones.

$r = \sqrt{20}$ Se extrae la raíz.

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 20$.



Actividades

Ejercita: 1-2 Razona: 3 Modela: 4-5-6-7

1 **Determina si cada punto P pertenece o no pertenece a la circunferencia dada.**

a. $P(4, -1)$ a $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

b. $P\left(-\frac{3}{4}, 4\right)$ a $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + (y-1)^2 = 9$

c. $P(1, -3)$ a $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 25$

d. $P\left(\frac{1}{2}, 7\right)$ a $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = 16$

e. $P(4, -2)$ a $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 9$

2 **Encuentra la ecuación canónica de la circunferencia con los datos indicados.**

a. $C\left(0, \frac{2}{3}\right); r = 3$

b. $C(1, 4); r = 2$

c. $C(0, -2); r = 4$

d. $C(0, 0); r = \frac{1}{2}$

e. $C\left(\frac{2}{5}, 3\right); r = 7$

f. $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right); r = 5$

g. $C\left(\frac{5}{2}, 4\right); r = 3$

h. $C(1, 1); r = \sqrt{2}$

i. $C(-1, 0); r = 3$

j. $C(3, -4); r = \frac{5}{4}$

k. $C(1, 2); r = \sqrt{7}$

l. $C(-7, -2); r = \sqrt{11}$

3 **Encuentra las coordenadas del centro y el radio que corresponden a cada ecuación. Luego, grafica cada circunferencia.**

a. $x^2 + y^2 = 9$

b. $x^2 + y^2 = 16$

c. $(x+8)^2 + (y+2)^2 = 25$

d. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = 36$

e. $\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(y + \frac{7}{2}\right)^2 = 4$

f. $x^2 + y^2 = 49$

g. $(x+1)^2 + y^2 = 5$

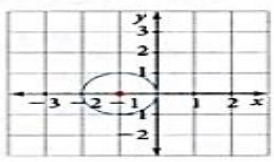
h. $(x+3)^2 + y^2 = 16$

i. $x^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 9$

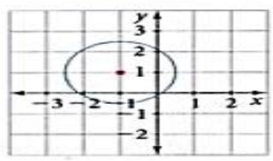
j. $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

4 **Determina la ecuación de cada circunferencia representada.**

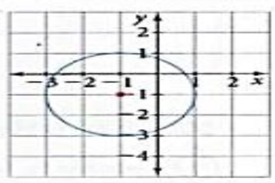
a.



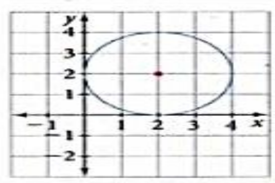
c.



b.



d.



5 **Determina la ecuación de la circunferencia con centro $(-1, 6)$ y que pasa por $(3, -3)$. Luego, contesta: ¿está el punto $(-2, -8)$ situado en esa circunferencia?**

6 **Escribe la ecuación canónica de una circunferencia que sea:**

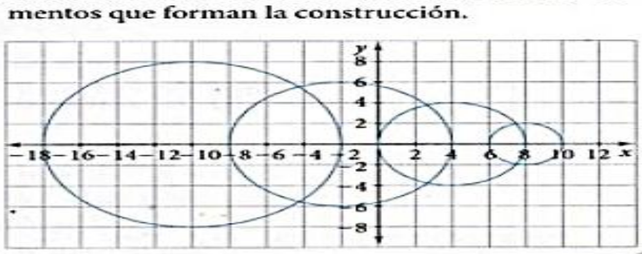
a. Tangente al eje y y cuyo radio sea igual al de la circunferencia con ecuación $x^2 + y^2 = 36$.

b. Tangente al eje x y al eje y al mismo tiempo.

c. Su diámetro sea el segmento que une los puntos $P(-4, 1)$ y $Q(2, -5)$.

d. Su diámetro sea el segmento que une los puntos $P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ y $Q\left(2, \frac{1}{5}\right)$.

7 **Encuentra las ecuaciones canónicas de los elementos que forman la construcción.**



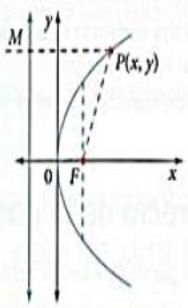
(LA PARÁBOLA)

La parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ del plano, que equidistan de una recta fija denominada *directriz* y de un punto fijo F, llamado *foco*. Así,

$$d(P, M) = d(P, F)$$

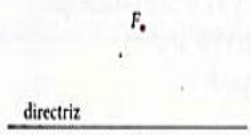
Donde M es el punto sobre el que se proyecta P, en la directriz.



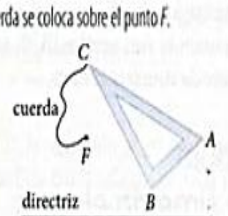
Construcción de la parábola

Para construir una parábola se siguen los pasos que se describen a continuación:

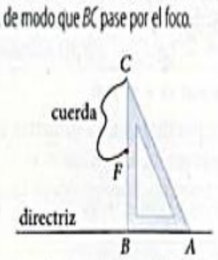
1. Sobre una hoja de papel se traza una recta fija d (directriz) y un punto fijo F (foco). F exterior a la recta.



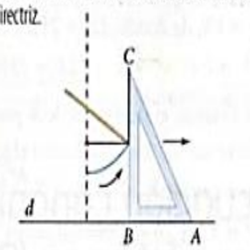
2. Con una escuadra ABC, con ángulo recto en B, se coloca el extremo de una cuerda en el punto C. La longitud de la cuerda es BC. El otro extremo de la cuerda se coloca sobre el punto F.



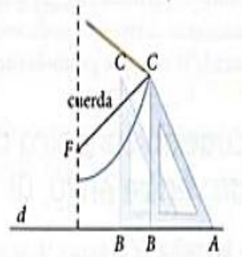
3. Se ubica el cateto AB de la escuadra sobre la directriz, de modo que BC pase por el foco.



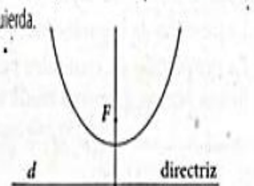
4. Con la punta de un lápiz se mantiene tensa la cuerda y se hace un trazo sobre el papel, a medida que la escuadra se desplaza hacia la derecha sobre la directriz.



5. El trazo obtenido es una rama de la parábola.



6. Se repite el proceso para completar la parábola pero esta vez, se hace el desplazamiento hacia la izquierda.



Elementos de la parábola

En una parábola se distinguen los siguientes elementos:

Eje de simetría o eje focal: es la línea recta l donde una rama de la parábola se refleja en otra.

Vértice: es el punto V de intersección de la parábola con el eje de simetría.

Foco: es el punto fijo F del plano que equidista de cualquier punto sobre la parábola y se encuentra sobre el eje de simetría.

Directriz: en la línea recta d cuya distancia a cualquier punto sobre la parábola es la misma, es perpendicular al eje de simetría.

Lado recto: es la cuerda LR perpendicular al eje de simetría de la parábola, que pasa por el foco.

Longitud del lado recto de la parábola

A partir de la definición de la parábola y con la gráfica de la figura 9, se plantean las siguientes conclusiones:

- El vértice de la parábola es el punto medio del $\overline{FQ}$, donde F es el foco y Q es la intersección del eje de simetría con la directriz.
- El lado recto $\overline{LR}$ de la parábola y el $\overline{RT}$ perpendicular a la directriz, se tiene que son: $\overline{FR} = RT$. Además, $RT = FQ$.

Como V es el punto medio de $\overline{FQ}$ y $\overline{FQ} = \overline{RT}$, entonces, $\overline{RT} = 2\overline{FV}$.

Como L y R son simétricos con respecto al eje de simetría de la parábola, entonces:

$LF = FR$, de donde, $LR = 2FR$ y como $FR = RT$ y $RT = 2FV$ se tiene que:

$$LR = 2FR = 2RT = 2(2FV) = 4FV$$

Por lo tanto, el lado recto de la parábola $LR = 4FV$.

Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0, 0)

Cuando la parábola está ubicada en el plano cartesiano, con vértice en el origen, su ecuación se determina analizando dos casos: la parábola con vértice (0, 0) y eje de simetría el eje x y la parábola con vértice (0, 0) y eje de simetría el eje y.

Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0, 0) y el eje de simetría el eje *x*

En la gráfica de la figura 10 se muestra una parábola con eje de simetría el eje x y vértice en (0, 0). En la parábola se tiene qué:

- La distancia del foco al vértice es p, es decir, $d(F, V) = p$. Por lo tanto, las coordenadas del foco son $F(p, 0)$.
- La directriz de la parábola es la recta cuya ecuación es $x = -p$.
- La proyección de cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola en la directriz es de la forma $M(-p, y)$, por lo tanto, la distancia entre el punto P y M es:

$$d(P, M) = \sqrt{[x - (-p)]^2 + (y - y)^2} = x + p$$

- La distancia de $P(x, y)$ al fofo F es: $d(P, F) = \sqrt{(x - p)^2 + y^2}$.

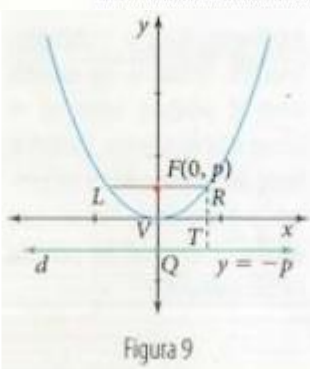


Figura 9

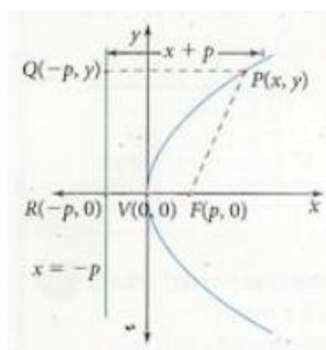


Figura 10

GEOMETRÍA ANALÍTICA
(LA PARÁBOLA)

Por la definición de la parábola se tiene que:

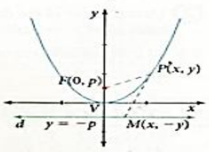
$d(P, F) = d(P, M)$	Se remplazan las $d(P, F)$ y $d(P, M)$.
$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$	Se elimina el radical.
$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$	Se desarrollan los cuadrados.
$y^2 = 4px$	Se resta x^2, p^2 y se suma $2xp$.

Por lo tanto, la ecuación de la parábola con centro $(0, 0)$, foco en $(p, 0)$, directriz $x = -p$ y eje de simetría x es $y^2 = 4px$.

La ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en $(p, 0)$ y eje de simetría el eje x, es $y^2 = 4px$.

Ecuación canónica de la parábola con vértice en (0, 0) y eje de simetría el eje y

En la gráfica se muestra una parábola con eje de simetría el eje y y vértice en $(0, 0)$, en la parábola se tiene que:

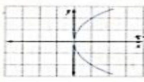


- Las coordenadas del foco son $F(0, p)$.
- La directriz de la parábola es la recta cuya ecuación es $y = -p$.
- La proyección de cualquier punto $P(x, y)$ de la parábola en la directriz, es de la forma $M(x, -p)$, así:
  $d(P, M) = \sqrt{(x-x)^2 + [y-(-p)]^2} = y + p$
- La distancia de $P(x, y)$ al foco F es:
  $$d(P, F) = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

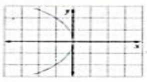
Realizando un análisis similar al anterior se deduce la ecuación canónica con vértice en $(0, 0)$ y eje de simetría el eje y. Así:

La ecuación canónica de la parábola con vértice en $(0, 0)$, foco en $(0, p)$, y eje de simetría el eje y, es $x^2 = 4py$.

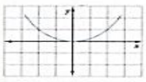
Si $p > 0$, la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola que se abre hacia la derecha del vértice, porque el foco F se encuentra a la derecha del vértice $(0, 0)$.



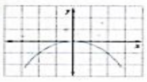
Si $p < 0$, la ecuación $y^2 = 4px$ representa una parábola que se abre hacia la izquierda del vértice, porque el foco F se encuentra a la izquierda del vértice $(0, 0)$.



Si $p > 0$, la ecuación $x^2 = 4py$ representa una parábola que se abre hacia arriba del vértice, porque el foco F se encuentra arriba del vértice $(0, 0)$.



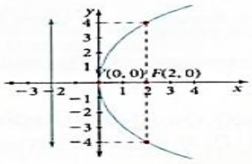
Si $p < 0$, la ecuación $x^2 = 4py$ representa una parábola que se abre hacia abajo, porque el foco F se encuentra abajo del vértice $(0, 0)$.



Ejemplos

1 **Representar gráficamente la parábola cuyo vértice es $(0, 0)$, foco $(2, 0)$ y directriz $x = -2$.**

Se ubica en el plano cartesiano el vértice, el foco y la directriz dados. Como $p > 0$, entonces, la parábola se abre hacia la derecha. Como $p = 2$, la longitud del lado recto es $LR = |4p| = |4 \times 2| = 8$. La gráfica es:



2 **Determinar el eje de simetría, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -12x$.**

Al comparar la ecuación $y^2 = -12x$ con $y^2 = 4px$ se tiene que:

$4p = -12$

$p = -3$

Como $p < 0$, la parábola abre hacia la izquierda.

El foco es $(-3, 0)$

La directriz es $x = 3$

3 **Representar gráficamente la parábola con centro en $(0, 0)$ cuya ecuación es $x^2 = -8y$.**

Al comparar la ecuación $x^2 = -8y$ con $x^2 = 4py$ se tiene que:

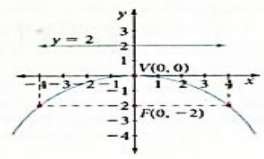
$4p = -8$

$p = -2$

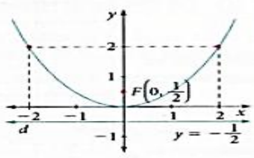
Como $p < 0$, la parábola abre hacia abajo.

El foco es $(0, -2)$

La directriz es $y = 2$



4 **Encontrar la ecuación y la directriz de la parábola a partir de la figura.**



La parábola tiene vértice en el origen y su eje de simetría es el eje y.

El foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$; por lo tanto, $p = \frac{1}{2}$.

Como la parábola tiene eje de simetría el eje x, entonces, su ecuación es de la forma $x^2 = 4py$.

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y = 2y$ Se remplaza el valor de p.

Por lo tanto, la ecuación de la parábola es $x^2 = 2y$.

Actividades

Ejercita: 1-2-3 Modela: 4

1 Encuentra las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto de cada parábola.

a. $y^2 = -12x$
b. $y^2 - 4x = 0$
c. $x^2 + y = 0$
d. $x^2 = 9y$ k.
e. $y^2 + 2x = 0$
f. $x^2 + 12y = 0$
g. $x^2 - \frac{3}{2}y = 0$
h. $x^2 + 12y = 0$
i. $x^2 = -5y$
j. $x^2 - 14y = 0$
k. $x^2 + 8y = 0$
l. $y = \frac{1}{2}x^2$
m. $y^2 - \frac{1}{4}x = 0$
n. $y^2 - \frac{1}{2}x = 0$

2 Determina la ecuación de la parábola a partir de los siguientes elementos:

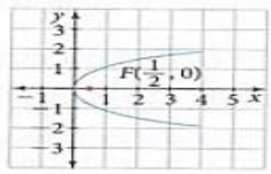
a. Vértice: $(0, 0)$; directriz: $y - 4 = 0$
b. Vértice: $(0, 0)$; foco $(0, 3)$
c. Vértice: $(0, 0)$; directriz: $x = -2$
d. Vértice: $(0, 0)$; foco $(-3, 0)$
e. Vértice: $(0, 0)$; directriz: $x = 2$
f. Vértice: $(0, 0)$; directriz: $x = -\frac{1}{2}$
g. Vértice $(0, 0)$; foco $\left(0, \frac{-5}{3}\right)$
h. Vértice $(0, 0)$; foco $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$

3 Completa la siguiente tabla.

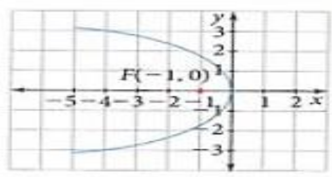
Vértice	Foco	Directriz	Ecuación
$(0, 0)$		$x = \frac{1}{4}$	
$(0, 0)$		$y = -3$	
$(0, 0)$		$y = 4$	
$(0, 0)$	$(3, 0)$		
$(0, 0)$		$x = -\frac{1}{2}$	
			$y^2 + 4x = 0$
$(0, 0)$	$(5, 0)$		

4 Determina las ecuaciones de las parábolas.

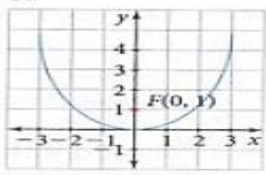
a.



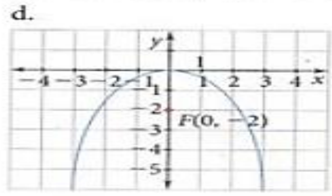
c.



b.

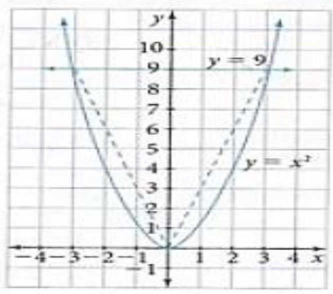


d.



Soluciona problemas

5 Considera la siguiente figura.



a. Determina el área sombreada del triángulo.
b. Cuando se inscribe un triángulo dentro de una parábola como en la figura, el área que encierra la parábola desde la base del triángulo es $\frac{4}{3}$ del área del triángulo. Determina el área que encierra la parábola entre $x = -3$ y $x = 3$.

6 Demuestra que la ecuación que tiene la forma $Ax^2 + Dy = 0$ con $A \neq 0$ y $D \neq 0$ es la ecuación de una parábola con vértice en $(0, 0)$ y eje de simetría el eje y. Luego, determina las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

La elipse

La elipse es un lugar geométrico de los puntos del plano, tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 denominados *focos* es constante. Así, el punto $P(x, y)$ pertenece a la elipse si $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ donde a es un número real positivo.

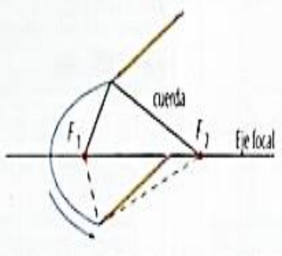
Construcción de una elipse

Para construir una elipse se procede según los siguientes pasos:

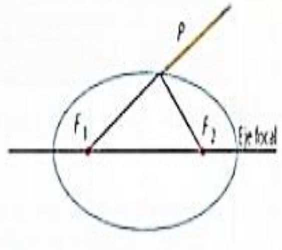
1. Sobre una hoja de papel se ubican dos puntos F_1 y F_2 que son los focos de la elipse.

2. Se toma una cuerda de longitud mayor que la distancia entre F_1 y F_2 y se fijan sus extremos sobre los focos.

3. Con la punta de un lápiz se mantiene tensa la cuerda en el punto P. Luego, se desliza el lápiz alrededor de F_1 y F_2 sin dejar de tensar la cuerda.

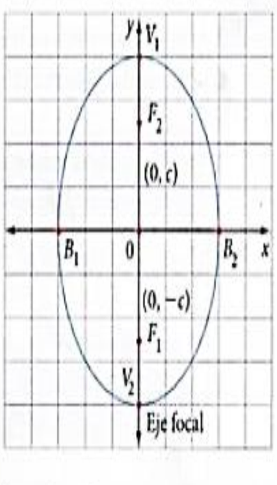


4. Se continúa deslizando el lápiz hasta obtener la elipse completa.



Elementos de la elipse

Los elementos de la elipse son:



Los focos: son los puntos fijos F_1 y F_2 del plano.

El eje focal o el eje principal: es la recta que pasa por los dos focos.

El centro C: es el punto medio del segmento que une los dos focos.

Eje normal o secundario: es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la elipse.

Los vértices: en los puntos V_1 y V_2 donde la elipse corta al eje focal.

El eje mayor: es el segmento que une los vértices sobre el eje focal V_1 y V_2.

El eje menor: es el segmento que une los puntos de intersección de la elipse con el eje normal.

El lado recto: es el segmento perpendicular al eje focal que pasa por uno de los focos y que une a dos puntos de la elipse.

Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0)

Cuando la elipse está ubicada en el plano cartesiano, con centro en el origen, su ecuación se determina analizando dos casos: la elipse con eje focal igual al eje x y la elipse con eje focal igual al eje y.

Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal sobre el eje x

En la **figura 12** se muestra una elipse con centro en $(0, 0)$, eje focal x y focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$.

Para un punto $P(x, y)$ de la elipse se cumple que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$ *Se aplica definición de distancia.*

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ *Se resta $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.*

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 - y^2}\right)^2$$ *Se eleva al cuadrado.*

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$ *Se elimina la raíz y se desarrolla el cuadrado.*

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

$$4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ *Se desarrollan los cuadrados.*

$$(xc - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$$ *Se elevan al cuadrado ambos miembros.*

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2$$ *Se elimina la raíz y se desarrolla el cuadrado.*

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$ *Se desarrolla el cuadrado.*

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

La distancia del punto $B_1(0, b)$ a cada foco es a, ya que la suma de las distancias a los dos focos es $2a$ como se aprecia en la figura. Por lo tanto, se tiene que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$ *Se aplica el teorema de Pitágoras.*

$$b^2 = a^2 - c^2$$ *Se despeja b^2.*

Al remplazar $b^2 = a^2 - c^2$ en la ecuación $x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$ *Se remplaza $a^2 - c^2$ por b^2.*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ *Se divide por a^2b^2.*

La ecuación canónica de una elipse con centro $(0, 0)$, focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ y los cortes con el eje y en $B_1(0, b)$ y $B_2(0, -b)$ es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y donde $a > b > 0$ y $a^2 = b^2 + c^2$.

La hipérbola

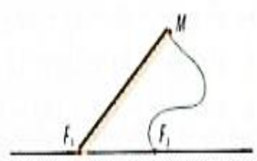
La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos denominados focos es constante. Así, el punto $P(x, y)$ pertenece a la hipérbola si $d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ donde a es un real positivo.

Construcción de una hipérbola

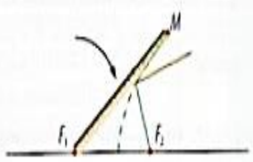
Para la construcción de la hipérbola se lleva a cabo el siguiente proceso:

1. Sobre una hoja de papel se marcan dos puntos F_1 y F_2.

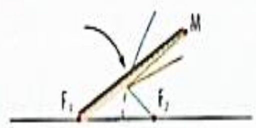
2. Se toma una regla de longitud L_1 y una cuerda de longitud L_2, tal que $L_1 - L_2 < F_1F_2$.



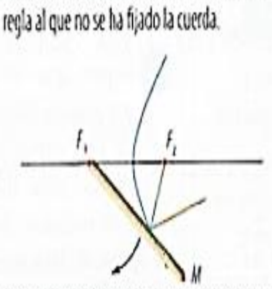
3. Se fija un extremo de la cuerda a un extremo M de la regla y el otro extremo se fija sobre el foco F_2.



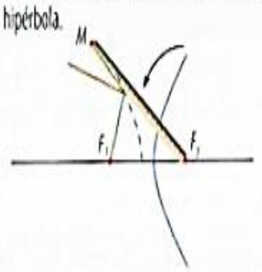
4. Con la punta del lápiz, en contacto con la regla, se mantiene tensa la cuerda y se gira la regla alrededor de F_1 describiendo un trozo continuo.



5. El proceso se completa al colocar el extremo de la regla al que no se ha fijado la cuerda.



6. Se repite el proceso para obtener la otra rama de la hipérbola.



En una hipérbola se determinan los siguientes elementos.

Focos: son los puntos fijos del plano F_1 y F_2.

Eje focal: es la recta que pasa por los dos focos.

Vértices: son los puntos de la hipérbola que están sobre el eje focal V_1 y V_2.

Eje transverso: es el segmento cuyos extremos son los vértices de la hipérbola.

Centro: punto medio del eje transverso.

Eje normal: es la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro de la hipérbola.

Eje conjugado: es el segmento perpendicular al eje transverso que pasa por el centro de hipérbola.

Asíntotas: son dos rectas que pasan por el centro de la hipérbola, las cuales se aproximan a las ramas de la hipérbola sin tocarla y se extienden indefinidamente.

Lado recto: es un segmento perpendicular al eje focal que pasa por un punto de los focos y que une a dos puntos de la hipérbola.

Ecuación canónica de la hipérbola con centro en (0, 0)

En la figura 15 se muestra una hipérbola con centro (0, 0) y eje focal sobre el eje x.

Los focos F_1 y F_2 están sobre el eje focal, es decir, sobre el eje x. Como el centro O es el punto medio del segmento que une los focos, entonces, las coordenadas de los focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$.

Para un punto $P(x, y)$ de la hipérbola se cumple que:

$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$ — *Se parte de la definición de la hipérbola.*

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ — *Se aplica la distancia entre P y cada foco.*

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ — *Se suma $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.*

$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ — *Se eliminan las raíces y se resuelven las operaciones.*

$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)^2$ — *Se factoriza.*

Como $c^2 = a^2 + b^2$, entonces, $b^2 = c^2 - a^2$.

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ — *Se remplaza $c^2 - a^2$ por b^2.*

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — *Se dividen ambos miembros por a^2b^2.*

- La ecuación canónica de la hipérbola con centro (0, 0), con eje focal sobre el eje x, focos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, vértices $V_1(-a, 0)$ y $V_2(a, 0)$ es:

  $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ donde } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2.$$

  Además, $OF = c$ y los extremos del eje conjugado son $(0, b)$ y $(0, -b)$. Las ecuaciones de la asíntotas son $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$.

  Del mismo modo la ecuación canónica de la hipérbola con centro en el origen y eje focal sobre el eje y.

  En la figura 16 se muestra una hipérbola con centro (0, 0) y eje focal sobre el eje y.

  Los focos F_1 y F_2 están sobre el eje focal, es decir, sobre el eje y.

  Como el centro O es el punto medio del segmento que une los focos, entonces, las coordenadas de los focos son $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$.

- La ecuación canónica de una hipérbola con centro (0, 0), con eje focal sobre el eje x, focos $F_1(0, -c)$ y $F_2(0, c)$, vértices $V_1(0, -a)$ y $V_2(0, a)$ es:

  $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \text{ donde } a, b, c > 0, c > a \text{ y } c^2 = a^2 + b^2$$

  Además, $OF = c$ y los extremos del eje conjugado son $(b, 0)$ y $(-b, 0)$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$.

  La excentricidad de una hipérbola se define como $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$, con $c > a$. La excentricidad de la hipérbola siempre es mayor que 1.

  Longitud del lado recto de la hipérbola se obtiene así: $LR = \frac{2b^2}{a}$.

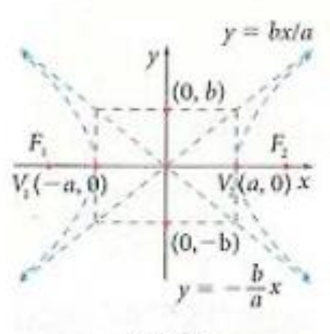


Figura 15

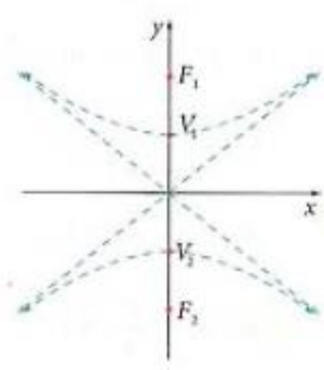


Figura 16

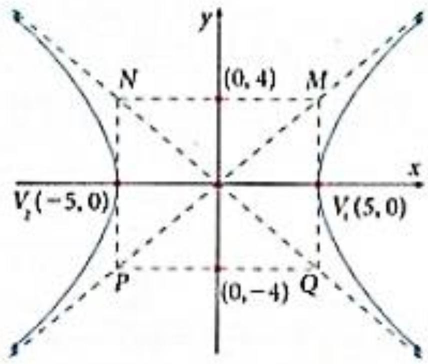
GEOMETRÍA ANALÍTICA

(EJEMPLO Y ACTIVIDAD SOBRE ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA)

Ejemplo

Dada la ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, determinar los elementos de la hipérbola y realizar su gráfica.

Al comparar la ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ con $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se tiene que $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, como $b^2 = c^2 - a^2$, se tiene que $c^2 = b^2 + a^2 = 16 + 25 = 41$. Por lo tanto, $a = 5$, $b = 4$ y $c = \sqrt{41}$.



Así, los elementos de la hipérbola son:

Focos: $(-\sqrt{41}, 0)$ y $(\sqrt{41}, 0)$

Vértices: $(-5, 0)$ y $(5, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{4}{5}x$ y $y = -\frac{4}{5}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

La gráfica de la hipérbola se muestra al lado.

Actividades

Ejercita: 1-2 Modela: 3

1 Escribe la ecuación canónica de la hipérbola cuyo centro es el origen y que tiene los elementos que se indican en cada caso.

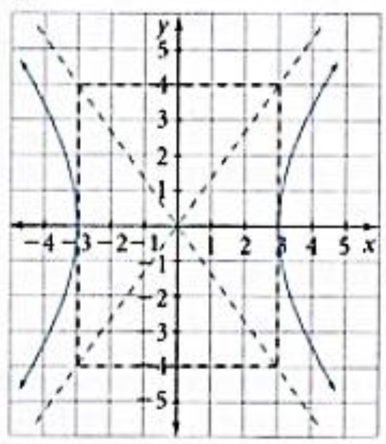
a. $V(0, 3)$ y $F(0, 4)$
b. $V(-4, 0)$ y $F(-5, 0)$
c. $V(0, -4)$ y $F(0, -\sqrt{41})$
d. $V(-8, 0)$ y $F(-10, 0)$
e. $V(0, -2)$ y $F(0, -6)$
f. $V(0, 1)$ y $F(0, 2)$
g. $V(0, 1)$ y $F(0, 3)$
h. $V(0, 3)$ y $F(0, 5)$
i. $V(3, 0)$ y $F(-5, 0)$
j. $V(-6, 0)$ y $e = \frac{5}{4}$

2 Dibuja las hipérbolas cuyas ecuaciones se describen a continuación. Determina en cada caso las ecuaciones de las asíntotas:

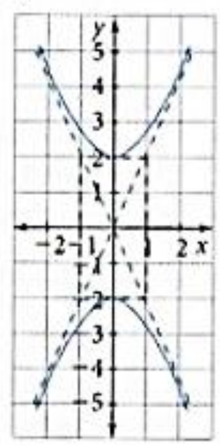
a. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$
b. $y^2 - x^2 = 36$
c. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{25} = 1$
d. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$
e. $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
f. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
g. $2x^2 - 3y^2 = 12$
h. $8x^2 - 9y^2 = 72$
i. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$
j. $\frac{x^2}{16} - y^2 = 1$

3 Determina la ecuación de las hipérbolas de cada gráfica.

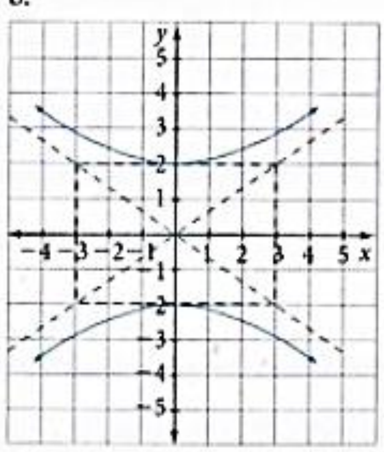
a.



c.



b.



d.